MIHAI CIPU

CLASE DE INELE ȘI MODULE

Editura Universității din București

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

MIHAI CIPU

CLASE DE INELE SI MODULE

Editura Universității din București
– 2002 –

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI
COTA III 475500

94/03

Referenți științifici: Prof. dr. Dorin POPESCU
Prof. dr. Paltin IONESCU

© Editura Universității din București
Șos. Panduri 90-92, București - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

B.C.U. Bucuresti
C20030307

Descrierea CIP a Bibliotecii Naț... a României
CIPU, MIHAI
Clase de inele și module / Mihai Cipu. - București : Editura Universității din București, 2002
p. ; cm.
Bibliogr.
Index.
ISBN 973-575-697-8

512.7

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Părinţilor mei

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cuprins

Introducere ii

Capitolul 1. Module noetheriene şi module artiniene 1
1. Condiţii de lanţuri pentru inele şi module 1
2. Module de lungime finită 9
3. Descompunere primară în module noetheriene 13
4. Structura inelelor artiniene 37

Capitolul 2. Dimensiunea Krull a inelelor noetheriene 41
1. Extinderi întregi de inele 41
2. Lema de normalizare 53
3. Funcţia Hilbert-Samuel 62
4. Dimensiunea Krull a inelelor semilocale noetheriene 69

Capitolul 3. Module Cohen-Macaulay 80
1. Şiruri regulate 80
2. Inele Cohen-Macaulay 89
3. Inele regulate 95

Capitolul 4. Metode omologice în studiul inelelor regulate 99
1. Module proiective şi module injective 99
2. Dimensiune proiectivă 106
3. Teorema Auslander-Buchsbaum 112
4. Caracterizări omologice pentru inele regulate 116

Bibliografie 126

Index 127

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Introducere

Teorema fundamentală a aritmeticii apare în „Elementele“ lui Euclid. Chiar dacă acestea ar fi doar o compilaţie, un compendiu, aşa cum susţin mulţi istorici ai ştiinţei, tot ar fi mai mult de 2 200 de ani de când se cunoaşte că orice număr natural supraunitar este în mod unic produsul unor numere prime.

În secolul al XIX-lea, încercările de a demonstra mare teoremă a lui Fermat au eşuat pentru că foloseau o descompunere analoagă pentru numere de forma $a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{p-1}\zeta^{p-1}$, unde p este un număr prim, $a_i \in \mathbb{Z}$, iar $\zeta \neq 1$ este o rădăcină de ordin p a unităţii. E. Kummer a introdus noţiunea de întreg algebric şi cea de număr ideal pentru a crea un context în care un rezultat asemănător teoremei fundamentale a aritmeticii subzistă, context necesar în studiul său asupra teoremei lui Fermat. R. Dedekind a demonstrat că în inele de întregi algebrici, orice ideal propriu se poate scrie în mod unic ca un produs de ideale prime.

În terminologia actuală, inelele studiate de Dedekind sunt de dimensiune unu. Pentru inele de dimensiune cel puţin doi nu se poate demonstra un astfel de rezultat. E. Lasker, rămas celebru în matematică, dar şi în sport, fiind campion mondial la şah, observă în 1905 că într-un inel de întregi algebrici un produs de puteri de ideale prime este identic cu intersecţia acestor puteri. Reuşeşte să definească o noţiune (ideal primar) în inele de polinoame cu un număr finit de variabile şi coeficienţi complecşi şi demonstrează că orice ideal propriu al acestor inele de polinoame este intersecţie finită de ideale primare. E. Noether arată în 1921 că această descompunere primară are loc în orice inel comutativ, unitar, în care orice ideal este finit generat. Astăzi astfel de inel se numesc noetheriene. Noether a caracterizat inelele ce îi poartă numele cu ajutorul condiţiei lanţurilor ascendente. Condiţia duală—condiţia lanţurilor descendente—a fost considerată de E. Artin în 1927, iar inelele care îndeplinesc această condiţie sunt denumite, în onoarea sa, inele artiniene.

În 1938 W. Krull a publicat un impozant memoriu despre inele locale în care îşi face apariţia o clasă importantă de inele locale, denumite de C. Chevalley „inele regulate“. Terminologia este justificată de faptul că, în context geometric, aceste inele locale sunt strâns legate de noţiunea de punct regulat pe o varietate algebrică. Punctele regulate (sau netede) de pe o varietate sunt considerate simple, celelalte (punctele singulare) au o complexitate ce poate fi pusă în corespondenţă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

cu proprietăţi ale inelelor locale. Pentru a clasifica singularităţile varietăţilor algebrice au fost introduse relaxări succesive ale regularităţii. Inelele Cohen-Macaulay constituie o clasă de inele foarte importantă atât în algebra comutativă, cât şi în geometria algebrică. Teoria reprezentărilor modulele Cohen-Macaulay apare în clasificarea singularităţilor, oferind punct de vedere alternativ celor de sorginte topologică.

În istoria ştiinţelor se constată frecvent că dezvoltarea unui domeniu are loc prin studierea unor noţiuni şi probleme noi sau cu mijloace inspirate din alte zări. Această fază de expansiune este înlocuită de aspiraţia către restabilirea identităţii sub tutela unor viziuni unificatoare. Urmează o perioadă în care propriile rezultate sunt radiate spre domenii mai mult sau mai puţin apropiate, înapoind, cu dobândă, ceea ce s-a primit. Pe acest traseu au apărut algebra omologică, care a permis în anii 1950–1960 transferul unor idei şi tehnici familiare topologilor spre algebra comutativă, şi combinatorica algebrică, prin intermediul căreia metodele algebrice au permis avansarea către soluţionarea unora dintre problemele de combinatorică. Metodele algebrei omologice sunt instrumente foarte puternice utilizate în studiul inelelor. Aici nu putem decât ilustra succesul lor în tranşarea unor chestiuni referitoare la inele regulate.

Textul a servit studenţilor înscrişi în anul I de studii aprofundate în algebră şi geometrie pentru un curs de un semestru. Restricţii severe de timp au impus o selecţie riguroasă a noţiunilor şi rezultatelor, fiind reţinute doar cele strict necesare pentru conturarea unei viziuni corecte şi a unui bagaj de cunoştintţe temeinice, cu aplicabilitate imediată la cursurile oferite în continuare. Rezultatele incluse şi-au dobândit deja atributul de „clasice“, servind la un studiu specializat în subdomenii ale algebrei comutative sau geometriei algebrice. Secţiunile au o structură asemănătoare: definiţiile sunt însoţite de exemple, urmate apoi de un studiu al stabilităţii proprietăţilor la operaţiile uzuale din algebră (imagine omomorfă, localizare, comportare în şir exact, extindere polinomială, transfer prin morfisme). Exerciţiile sunt destinate fixării cunoştinţelor şi nu sunt invocate ulterior în text.

Datorită parcursului diferit, rezultat al opţiunilor pe care le-au formulat, studenţii nu au o pregătire omogenă, bagajul comun de cunoştinţe reducându-se la cele acoperite de programa de algebră a primilor doi ani de facultate. Din acest motiv, majoritate rezultatelor au demonstraţii complete şi detaliate, pentru care sunt suficiente cunoştinţe de bază referitoare la localizare, produs tensorial şi module plate. În puţinele cazuri în care o astfel de tratare ar fi necesitat pregătiri prea

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ample, demonstraţiile au fost înlocuite cu trimiteri bibliografice precise la surse acesibile.

Rezultatele sunt numerotate prin două numere arabe: primul indică secţiunea, iar al doilea numărul enunţului din secţiunea considerată. În rarele cazuri în care au fost citate rezultate din capitolele anterioare, numerele rezultatului sunt precedate de o cifră romană ce indică numărul capitolului în care se află enunţul invocat.

Toate inelele considerate în această lucrare sunt considerate comutative şi cu element unitate, iar morfismele de inele vor fi presupuse unitare. Notaţia $F \leq E$ înseamnă că F este submodul al modulului E. În particular, $I \leq A$ înseamnă că I este ideal al inelului A. Relaţia de incluziune între mulţimi este notată $X \subseteq Y$, iar notaţia $X \subset Y$ înseamnă că incluziunea este strictă. Un inel A având un singur ideal maximal M este notat (A, M, K), unde $K = A/M$ este corpul rezidual. În secţiunile ce se referă doar la inele noetheriene sau la inele locale, această condiţie este formulată la începutul secţiunii respective şi este inclusă implicit în ipoteza fiecărui rezultat din acea secţiune.

Pe parcursul pregătirii cursului am beneficiat de sfaturile domnilor profesori Lucian Bădescu şi Dorin Popescu, cărora le mulţumesc şi pe această cale.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CAPITOLUL 1

Module noetheriene şi module artiniene

Galois a introdus ideea de a studia un obiect matematic (ecuaţii polinomiale) indirect, prin intermediul altei structuri (grupuri asociate). O paradigmă asemănătoare funcţionează cu mult succes în multe alte contexte. Foarte fructuoasă s-a dovedit a fi considerarea relaţiilor de ordine pe mulţimi asociate obiectelor de interes. Pe această idee se bazează demonstraţia elegantă şi simplă dată de E. Noether faptului că în orice inel comutativ în care nu există şiruri infinite de ideale conţinute unul în altul, orice ideal este o intersecţie finită de ideale primare. Acest punct de vedere a fost însuşit în studiul modulelor peste inele necomutative, al laticilor, dar şi al spaţiilor topologice.

1. Condiţii de lanţuri pentru inele şi module

PROPOZIŢIE 1.1. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(ACC) *orice lanţ ascendent de submodule $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ este staţionar, i.e. există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $E_n = E_k$ pentru orice $n \geq k$,*

(MAX) *orice mulţime nevidă de submodule ale lui E conţine un element maximal faţă de incluziune.*

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia $(ACC) \implies (MAX)$ o demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există o muţime nevidă $\mathcal{L}$ de submodule ale lui E astfel încât $\mathcal{L}$ nu are elemente maximale faţă de incluziune. Considerăm $E_1 \in \mathcal{L}$. Atunci există $E_2 \in \mathcal{L}$ cu $E_1 \subset E_2$, în caz contrar E_1 ar fi element maximal, în contradicţie cu presupunerea făcută. Din acelaşi motiv există $E_3 \in \mathcal{L}$ cu $E_2 \subset E_3$. Astfel se pune în evidenţă un şir strict crescător de submodule ale lui E, şir care nu este staţionar.

$(MAX) \implies (ACC)$ Fie $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ un şir ascendent de submodule. În virtutea condiţiei (MAX), mulţimea $\mathcal{L} := \{ E_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ conţine un element maximal E_k. Pentru $n \geq k$ avem $E_k \subseteq E_n$ (pentru că lanţul este ascendent) şi $E_n \in \mathcal{L}$, deci $E_n = E_k$, altfel s-ar contrazice faptul că E_k este element maximal al mulţimii $\mathcal{L}$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Considerând pe mulţimea submodulelor ordinea opusă incluziunii, se obţine:

PROPOZIŢIE 1.2. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(DCC) *orice şir descrescător $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ de submodule este staţionar,*

(MIN) *orice mulţime nevidă de submodule ale lui E conţine un element minimal faţă de incluziune.*

DEFINIŢIE 1.3. Un A-modul E se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente ale propoziţiei 1.1 (resp. 1.2). Un inel se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă este astfel privit ca modul peste el însuşi.

Reamintim că un modul E este numit *finit generat* dacă există x_1, ..., $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $E = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$. Noţiunea duală este definită folosind dualitatea dintre suma şi intersecţia de submodule.

DEFINIŢIE 1.4. Un A-modul E se numeşte *finit cogenerat* dacă pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ cu $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = 0$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\displaystyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = 0$.

Dualitatea este mai puţin misterioasă după ce vom vedea că procedeul cel mai simplu de a construi un lanţ ascendent este să facem suma unor submodule, iar pentru a produce un lanţ descendent este firesc să considerăm intersecţia a tot mai multe submodule.

EXEMPLE. 1. $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}$ este finit generat (un sistem de generatori constă doar din elementul unitate), dar nu este finit cogenerat întrucât $\cap\{\, p\mathbb{Z} \,:\, p \text{ prim} \,\} = 0$ şi

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z} = p_1 p_2 \cdots p_n \mathbb{Z}$$

pentru orice numere prime $p_1, \ldots, p_n$, $n \geq 1$.

2. Fie K un corp. Un K-spaţiu vectorial este finit generat dacă şi numai dacă este de dimensiune finită, dacă şi numai dacă este finit cogenerat.

PROPOZIŢIE 1.5. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *E este A-modul finit generat,*

(*ii*) *pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ astfel ca $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = E$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = E$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Fie o familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ astfel ca $\sum_{\lambda\subset\Lambda} E_\lambda = E$. Se consideră un sistem finit de generatori x_1, ..., x_n pentru E. Fiecare x_k se scrie ca o sumă finită de elemente nenule $y_{kj} \in E_j$ pentru j parcurgând o mulţime finită Λ_j. Strângem în Γ toţi indicii submodulelor din familia considerată care conţin componentele y_{kj} ale generatorilor modulului E: $\Gamma := \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n$. Este clar că Γ este o parte finită a lui Λ şi că orice element din E este combinaţie liniară de x_k, deci şi de y_{kj}.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Se consideră familia de submodule $(Ax)_{x\in E}$ ale lui E. □

TEOREMA 1.6. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *E este A-modul noetherian,*
(*ii*) *orice submodul al lui E este finit generat,*
(*iii*) *pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.*

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Să presupunem că există un submodul F al unui modul noetherian E care nu este finit generat. Atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, avem $Ax_1 + \cdots + Ax_n \subset F$, deci există $x_{n+1} \in F \setminus \sum\limits_{i=1}^{n} Ax_i$. Inductiv se construieşte un lanţ ascendent nestaţionar de submodule ale lui F, deci şi ale lui E.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Se aplică propoziţia 1.5 A-modulului $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Dacă $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ este un lanţ ascendent de submodule ale lui E, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_{n\geq 0} E_n = \sum_{i=0}^{k} E_i = E_k \ .$$

Rezultă $E_n \subseteq E_k$ pentru toţi $n \geq k$. Cum incluziunea inversă are loc pentru că E_n formează un lanţ crescător faţă de incluziune, rezultă că lanţul considerat este staţionar. □

Rezultatul corespunzător pentru module artiniene este următorul:

TEOREMA 1.7. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *E este A-modul artinian,*
(*ii*) *orice modul cât al lui E este finit cogenerat,*
(*iii*) *pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Echivalenţa dintre prima şi ultima condiţie se demonstrează ca şi în cazul noetherian.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Fie $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ şi $p : E \longrightarrow E/F$ surjecţia canonică. Întrucât

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} p(E_\lambda) = p\big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\big) = p(F) = 0 \ ,$$

iar modulul cât E/F este finit cogenerat conform condiţiei (ii), deducem că există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} p(E_\gamma) = 0$. Ultima relaţie este echivalentă cu $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Fie $G \leq E$, $F := E/G$, $p : E \longrightarrow F$ surjecţia canonică şi $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie nevidă de submodule ale lui F cu $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = 0$. Considerând preimaginile $E_\lambda := p^{-1}(F_\lambda)$, avem

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = p^{-1}\big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\big) = p^{-1}(0) = G \ .$$

Condiţia (iii) asigură existenţa unei părţi finite $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $G = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$. De aici rezultă

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} p(E_\gamma) = p\big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma\big) = p(G) = 0 \ .$$

□

TEOREMA 1.8. *Fie $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ un şir exact de A-module. Atunci E este modul noetherian (resp. artinian) dacă şi numai dacă E' şi E'' sunt module noetheriene (resp. artiniene).*

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra numai echivalenţa afirmaţiilor referitoare la noetherianitate, restul demonstraţiei fiind similar.

Să presupunem că E este modul noetherian. Dacă $E'_0 \subseteq E'_1 \subseteq \subseteq E'_2 \subseteq \ldots$ este un lanţ ascendent de submodule ale lui E', atunci $(f(E'_n))_{n \geq 0}$ este un lanţ ascendent de submodule ale modulului noetherian E. Aşadar, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(E'_n) = f(E'_k)$ pentru toţi $n \geq k$. Morfismul f fiind injectiv, avem $E'_i = f^{-1}(f(E'_i))$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $E'_n = E'_k$ pentru $n \geq k$. Cum lanţul ascendent $(E'_n)_{n \geq 0}$ a fost arbitrar, conchidem că E' îndeplineşte condiţia (ACC).

Pentru fiecare lanţ ascendent $(E''_n)_{n \geq 0}$ de submodule ale lui E'', lanţul ascendent $(g^{-1}(E''_n))_{n \geq 0}$ de submodule ale lui E este staţionar. Cum g este surjectivă, avem $g(g^{-1}(E''_n)) = E''_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$. De aici se deduce rapid că lanţul considerat în E'' este staţionar.

Pentru reciprocă, se consideră $(E_n)_{n \geq 0}$ un lanţ ascendent de submodule ale lui E. Preimaginile modulelor E_i prin f, resp. imaginile lor prin g, formează lanţ ascendent pe modulul noetherian E'', resp. E'.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acestea staţionează: $f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$ şi $g(E_n) = g(E_k)$ pentru toţi $n \geq k$, unde k a fost convenabil ales. Vom arăta că $E_n = E_k$ pentru $n \geq k$.

Fie $x \in E_n$, unde $n \geq k$. Din $g(x) \in g(E_n) = g(E_k)$ rezultă că există $y \in E_k$ astfel ca $g(y) = g(x)$. Atunci $x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$. Aşadar, există $z \in E'$ cu $f(z) = x - y \in E_n + E_k = E_n$. Deci $z \in f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$, astfel că $x - y = f(z) \in E_k$. Prin urmare $x = (x - y) + y \in E_k$. □

COROLAR 1.9. *Un modul izomorf cu un modul noetherian (resp. artinian) este noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică teorema şirului exact

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E \longrightarrow E \longrightarrow 0 \,.$$

□

COROLAR 1.10. *Suma directă a unei familii finite de module este modul noetherian (resp. artinian) dacă şi numai dacă fiecare membru al familiei are aceeaşi proprietate.*

DEMONSTRAŢIE. Se raţionează prin inducţie după cardinalul familiei folosind şirul exact canonic

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n-1} E_i \longrightarrow 0 \,.$$

□

COROLAR 1.11. *Orice modul finit generat peste un inel noetherian (resp. artinian) este modul noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Un modul generat de n elemente este izomorf cu un cât al A-modulului A^n, care este A-modul noetherian (resp. artinian) conform rezultatului precedent. Apoi se aplică teorema 1.8. □

COROLAR 1.12. *Dacă A este un inel noetherian (resp. artinian) şi I este un ideal al său, atunci A/I este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Conform teoremei 1.8, A/I este A-modul noetherian (resp. artinian). Apoi se ţine cont că orice ideal al inelului A/I este A-modul. □

Ambele proprietăţi se comportă bine la localizare.

PROPOZIŢIE 1.13. *Dacă E este un A-modul noetherian (resp. artinian) şi S este un sistem multiplicativ închis în A, atunci $S^{-1}E$ este $S^{-1}A$-modul noetherian (resp. artinian).*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Aserţiunea rezultă din binecunoscuta corespondenţă dintre $S^{-1}A$-submodulele lui $S^{-1}E$ şi A-submodulele lui E care sunt S-saturate. □

EXEMPLE. 1. Orice inel finit este noetherian şi artinian pentru că există doar un număr finit de ideale.

2. Orice corp este inel noetherian şi artinian, având doar două ideale.

3. Orice inel principal este noetherian. Un inel principal este artinian dacă şi numai dacă este corp. Într-adevăr, dacă $p \neq 0$ este generatorul unui ideal maximal, şirul descrescător de ideale $(p) \supset (p^2) \supset \supset (p^3) \supset \dots$ nu este staţionar—în caz contrar rezultând existenţa unui număr natural $n > 0$ şi a unui element a al inelului astfel ca $p^n = ap^{n+1}$, ceea ce implică p inversabil.

4. Un spaţiu vectorial V este modul noetherian dacă şi numai dacă este modul artinian, dacă şi numai dacă are dimensiunea finită. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie liniar independentă de elemente ale lui V, pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră subspaţiile vectoriale V_n şi W_n generate de elementele cu indici $\leq n$, respectiv $> n$. Atunci $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un lanţ ascendent nestaţionar, iar $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un lanţ descendent nestaţionar. Dacă V este finit dimensional, se foloseşte exemplul 2 şi corolarul 1.11.

5. Pentru K corp, $K^{\mathbb{N}}$ şi $K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ nu sunt inele noetheriene. Afirmaţia referitoare la $K^{\mathbb{N}}$ este consecinţă a exemplului 4. Pentru inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate se observă, de pildă, că lanţul constând din idealele generate de primele n variabile, $n = 1, 2, \dots$, nu este staţionar.

6. Pentru p număr prim se defineşte $H_p := \{ \frac{x}{p^n} : x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ şi $\mathbb{Z}_{p^\infty} := H_p/\mathbb{Z}$. Atunci $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este $\mathbb{Z}$-modul artinian, dar nu noetherian. Pentru a demonstra aceste afirmaţii, considerăm G un subgrup propriu al lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ şi observăm că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât G este generat de clasa lui $1/p^n$. Rezultă că dacă $G = p^{-s}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ şi $G' = p^{-t}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ cu $s, t \in \mathbb{N}$, atunci $G' \leq G$ dacă şi numai dacă $t \leq s$. Prin urmare, laticea $\mathbb{Z}$-submodulelor lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este bine ordonată relativ la incluziune, adică îndeplineşte condiţia (MIN). Cum mulţimea numerelor naturale nu satisface condiţia lanţurilor ascendente, tragem concluzia că $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nu are proprietatea (ACC).

7. În notaţiile exemplului precedent, H_p nu este $\mathbb{Z}$-modul artinian şi nici noetherian, pentru că există un şir exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

8. Un subinel al unui inel noetherian (resp. artinian) nu are neapărat aceeaşi proprietate. De pildă, inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate de la exemplul 5 este subinel al corpului său de fracţii.

Rezultatul care urmează arată că proprietatea unui inel de a fi noetherian se transferă la inelul de polinoame într-o variabilă. Astfel putem da noi exemple de inele noetheriane.

TEOREMA 1.14. *(Teorema bazei a lui Hilbert) Dacă A este inel noetherian, atunci inelul de polinoame $A[X]$ este încă noetherian.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că dacă $A[X]$ nu este inel noetherian, atunci nici A nu este. Fie I un ideal în $A[X]$ care nu este finit generat. Alegem $f_1 \in I$ un polinom nenul de grad minim printre elementele lui I. Întrucât I nu coincide cu idealul generat de f_1, există $f_2 \in I \setminus f_1A[X]$. Alegem un polinom f_2 de grad minim între toate polinoamele cu această proprietate. Repetând construcţia, se obţine un şir de polinoame $(f_n)_{n\geq 1}$ cu f_n un polinom de grad minim din $I \setminus (f_1, \ldots, f_{n-1})A[X]$, $n \geq 1$. Notăm cu d_n gradul lui f_n şi cu a_n coeficientul său dominant. Din alegerea polinoamelor rezultă $d_1 \leq d_2 \leq \ldots$ Arătăm că lanţul de ideale $a_1A \subseteq (a_1, a_2)A \subseteq \ldots$ este strict crescător. Să presupunem contrariul. Atunci există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, astfel încât $(a_1, a_2, \ldots, a_k)A = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})A$ sau echivalent $a_{k+1} = a_1b_1 + \cdots + a_kb_k$ pentru nişte elemente $b_i \in A$. Atunci polinomul

$$g := f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{d_{k+1}-d_i} f_i$$

are gradul $< d_{k+1}$, este din idealul considerat I, dar nu aparţine idealului generat de f_1, …, f_k. Existenţa unui astfel de polinom contrazice alegerea lui f_{k+1}. □

Reciproca este valabilă pentru că dacă $A[X]$ este inel noetherian, atunci $A \simeq A[X]/(X)$ este $A[X]$-modul noetherian, deci inel noetherian conform corolarului 1.12.

Pentru a formula consecinţe importante ale acestui rezultat fundamental în algebra comutativă, reamintim următoarele noţiuni. Dacă $u : A \longrightarrow B$ este un morfism unitar de inele comutative, B va fi numit *A-algebră de morfism structural u*. Pe grupul abelian $(B, +)$ subiacent inelului B se introduce o structură de A-modul prin restricţia scalarilor via morfismul u, înmulţirea exterioară fiind definită prin formula $a \cdot x = u(a) \cdot x$, $a \in A$, $x \in B$, unde înmulţirea din partea dreaptă este înmulţirea internă cu care este înzestrat inelul B. În cazul în care u este

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

injectiv, identificând pe A cu imaginea sa prin u, putem presupune că A este un subinel al lui B şi că u este morfismul de incluziune $A \subseteq B$. Spunem în acest caz că B este o *extindere* a inelului A.

Pentru $x_1, \ldots, x_n \in B$ arbitrare se notează cu $A[x_1, \ldots, x_n]$ cel mai mic subinel al lui B care conţine elementele alese şi $u(A)$. Din proprietatea de universalitate a algebrei polinoamelor rezultă că aplicaţia $\alpha : A[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B$ definită prin evaluarea $f \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ este unicul morfism de inele astfel încât $\alpha(X_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, şi $\alpha(a) = u(a)$, $a \in A$. Este clar că

$$A[x_1, \ldots, x_n] = \operatorname{Im} \alpha = \{ f(x_1, \ldots, x_n) : f \in A[X_1, \ldots, X_n] \} .$$

Se spune că morfismul de inele $u : A \longrightarrow B$ este *de tip finit* sau că B este o *A-algebră de tip finit* sau că B este o *A-algebră finit generată* dacă există $x_1, \ldots, x_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $B = A[x_1, \ldots, x_n]$. În acest caz, $x_1, \ldots, x_n$ se numeşte *sistem de generatori ai A-algebrei B*. Din cele de mai sus rezultă că $B \simeq A[X_1, \ldots, X_n]/I$ pentru un ideal I în inelul de polinoame $A[X_1, \ldots, X_n]$. Se spune că morfismul u este *finit* sau că B este o *A-algebră finită* dacă B este A-modul finit generat.

PROPOZIŢIE 1.15. *Fie A un inel noetherian (resp. artinian) şi B o A-algebră finită. Atunci B este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Conform corolarului 1.11 B este un A-modul noetherian (resp. artinian). Cum orice ideal al lui B este şi un A-submodul al lui B privit ca A-modul, laticea idealelor lui B satisface condiţia (ACC) (resp. (DCC)). □

Are loc şi o reciprocă parţială a acestui rezultat:

TEOREMA 1.16. *(Eakin-Nagata-Eisenbud) Dacă A este un subinel al lui B astfel încât B este o A-algebră finită via morfismul incluziune $A \subseteq B$, iar B este inel noetherian (resp. artinian), atunci A este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Pentru o demonstraţie a afirmaţiei referitoare la noetherianitate trimitem la [**3**, teorema 8.10]. Cazul artinian se găseşte în [**10**]. □

PROPOZIŢIE 1.17. *Fie A un inel noetherian şi B o A-algebră de tip finit. Atunci B este un inel noetherian.*

DEMONSTRAŢIE. Inelul B este izomorf cu un inel factor al inelului de polinoame peste A într-un număr finit de nedeterminate. Un inel de forma $A[X_1, \ldots, X_n]$ este noetherian conform teoremei bazei a lui Hilbert. Demonstraţia se încheie folosind corolarul 1.12. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

EXERCIŢII.

1. Fie E un A-modul. Arătaţi că următoarele condiţii sunt echivalente:

(*i*) E este modul noetherian,

(*ii*) condiţia (ACC) este satisfăcută pentru submodulele finit generate ale lui E,

(*iii*) orice modul cât al lui E este noetherian.

2. Un inel este noetherian dacă şi numai dacă orice ideal prim este finit generat.

3. Dacă un inel are proprietatea că orice ideal maximal al său este finit generat, rezultă că inelul este noetherian?

4. Inelul de serii formale într-o variabilă cu coeficienţi într-un inel noetherian este inel noetherian.

5. Fie E un A-modul şi f un A-endomorfism al său.

a) Dacă E este modul artinian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $E = \operatorname{Im} f^n + \ker f^n$. Deduceţi că f este monomorfism dacă şi numai dacă este automorfism.

b) Dacă E este modul noetherian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $\operatorname{Im} f^n \cap \ker f^n = 0$. Aşadar, f este epimorfism dacă şi numai dacă este automorfism.

6. Orice epimorfism al unui modul finit generat este automorfism.

2. Module de lungime finită

Până acum am studiat în paralel noetherianitatea şi artinianitatea modulelor, ghidaţi de dualitatea existentă între cele două proprietăţi. Am demonstrat câteva proprietăţi ale modulelor noetheriene care nu au corespondent în cazul artinian. În această secţiune arătăm că prezenţa simultană a celor două proprietăţi are consecinţe importante, conducând la o generalizare a noţiunii de spaţiu vectorial de dimensiune finită.

DEFINIŢIE 2.1. Un lanţ finit de submodule

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{1}$$

se numeşte *filtrare finită* sau *serie normală* a lui E. Numărul n se numeşte *lungimea seriei*, iar modulele factor E_{i-1}/E_i, $1 \leq i \leq n$, poartă numele de *factori*.

O serie normală este numită *serie Jordan-Hölder* sau *şir de compoziţie* pentru E dacă factorii săi sunt module simple (*i.e.* E_{i-1}/E_i nu are submodule proprii oricare ar fi i, $1 \leq i \leq n$). Echivalent, o serie normală saturată (între ai cărei termeni nu mai pot fi introduse alte submodule).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Prin convenţie, modulul nul admite un şir de compoziţie de lungime zero.

PROPOZIŢIE 2.2. *Un modul E are un şir de compoziţie dacă şi numai dacă E este modul noetherian şi artinian.*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că E are un şir de compoziţie de lungime n. Raţionăm prin inducţie după n. În cazul $n = 0$, E este modulul nul şi nu avem nimic de demonstrat. Dacă $n = 1$, atunci E este un A-modul simplu, care evident este noetherian şi artinian. Presupunem că orice A-modul care are un şir de compoziţie de lungime cel mult n, $n \geq 1$, este noetherian şi artinian, iar E admite un şir de compoziţie $0 = E_{n+1} \subset E_n \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E$ de lungime $n + 1$. Atunci E_1 are un şir de compoziţie de lungime n, deci conform ipotezei de inducţie, E_1 este modul noetherian şi artinian. Cum E/E_1 este modul simplu, aplicând teorema 1.8 şirului exact

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E/E_1 \longrightarrow 0$$

se obţine că E este noetherian şi artinian.

Demonstrăm reciproca. Mulţimea tuturor submodulelor nenule ale modulului artinian E are un element minimal E_1. Se observă că E_1 este modul simplu, altfel s-ar contrazice minimalitatea sa. Dacă $E \neq E_1$, se raţionează la fel pentru modulul artinian nenul E/E_1, obţinându-se existenţa unui submodul E_2 al lui E având proprietatea că E_2/E_1 este modul simplu. În acest mod se găseşte un lanţ ascendent $0 \subset E_1 \subset \subset E_2 \subset \ldots$ de submodule ale modulului noetherian E. Acest lanţ este staţionar conform condiţiei (ACC). Pe de altă parte, din modul de alegere a submodulelor E_i rezultă că ultimul termen din lanţ nu poate fi decât întreg modulul E. □

LEMA 2.3. *Un A-modul nenul E este simplu dacă şi numai dacă există un ideal maximal M astfel încât $E \simeq A/M$.*

DEMONSTRAŢIE. Corpul A/M neavând ideale diferite de zero şi de el însuşi, înseamnă că A-modulul A/M este simplu pentru orice ideal maximal M. Reciproc, să presupunem că E este un modul nenul şi simplu. Pentru $x \in E$, $x \neq 0$, Ax este un submodul nenul al lui E. Prin urmare, $E = Ax$, deci există un morfism surjectiv $p : A \longrightarrow E$ definit prin asocierea $a \mapsto ax$. Din teorema fundamentală de izomorfism pentru module rezultă că nucleul $M := \ker p$ satisface $A/M \simeq E$. Dacă M nu ar fi ideal maximal, atunci A/M, deci şi E, ar conţine un submodul nenul, contradicţie. □

DEFINIŢIE 2.4. Se spune că A-modulul E are *lungime finită* dacă există majorare pentru lungimile tuturor seriilor normale.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

TEOREMA 2.5. *(Jordan-Hölder) Dacă există un şir de compoziţie pentru E, atunci E are lungime finită şi toate şirurile sale de compoziţie au aceeaşi lungime.*

DEMONSTRAŢIE. Fie

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{2}$$

un şir de compoziţie de lungime minimă pentru E. Vom arăta prin inducţie după n că orice serie normală a lui E are lungimea cel mult n. În particular, orice alt şir de compoziţie are lungimea mai mică sau egală cu n. În virtutea alegerii şirului de compoziţie 2), rezultă concluzia anunţată.

Teorema este evidentă pentru $n \leq 1$. Presupunem că $n > 1$ şi că aserţiunea este valabilă pentru modulele care au un şir de compoziţie de lungime mai mică decât n. Fie $0 = F_t \subset F_{t-1} \subset \ldots \subset F_1 \subset F_0 = E$ o serie normală arbitrară a lui E. Dacă $F_1 \subseteq E_1$, aplicând ipoteza de inducţie lui E_1 se obţine $t-1 \leq n-1$. Dacă $F_1 \not\subseteq E_1$, atunci $E_1+F_1 = E$ deoarece E/E_1 este modul simplu. Din teorema de izomorfism pentru module avem

$$\frac{E}{E_1} = \frac{E_1 + F_1}{E_1} \simeq \frac{F_1}{E_1 \cap F_1} .$$

Rezultă că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este modul simplu. Întrucât E_1 are o serie de compoziţie de lungime $n-1$, din ipoteza de inducţie se obţine că în submodulul său propriu $E_1 \cap F_1$ toate seriile normale au lungimea cel mult $n-2$. Folosind faptul că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este simplu, se deduce că F_1 are o serie de compoziţie de lungime $\leq n-1$. Aşadar, şi în acest caz avem $t-1 \leq n-1$. □

În virtutea teoremei Jordan-Hölder, următoarea definiţie are sens:

DEFINIŢIE 2.6. Maximul lungimilor seriilor normale dintr-un modul E în care există şir de compoziţie poartă numele *lungimea modulului* E. Notaţia consacrată este $l_A(E)$. Dacă nu există pericol de confuzie, se omite menţionarea explicită a inelului.

Din demonstraţia teoremei Jordan-Hölder se constată că $l_A(E)$ este egală cu lungimea oricărui şir de compoziţie. Cunoştinţele referitoare la modulele noetheriene şi artiniene ne permit să arătăm că lungimea este o funcţie aditivă pe mulţimea modulelor de lungime finită.

PROPOZIŢIE 2.7. *Fie dată o serie normală* (1) *pentru E. Atunci E are lungime finită dacă şi numai dacă E_{i-1}/E_i are lungime finită pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $l(E) < \infty$, atunci $l(E) = \sum_{i=1}^{n} l(E_{i-1}/E_i)$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să justificăm afirmaţiile pentru $n = 2$, cazul general rezultând apoi uşor prin inducţie. Aşadar, presupunem că $l(E) < \infty$ şi că $0 = E_2 \subset E_1 \subset E$ este o serie normală, pe care o rafinăm până la un şir de compoziţie. Modulele din acest şir de compoziţie situate între E_1 şi E (resp. E_2 şi E_1) induc un şir de compoziţie pentru E/E_1 (resp. E_1). Evident are loc relaţia $l(E) = l(E/E_1) + l(E_1)$.

Pentru implicaţia reciprocă, presupunem că E/E_1 şi E_1 sunt module de lungime finită. Obţinem un şir de compoziţie pentru E prelungind un şir de compoziţie pentru E_1 cu preimaginile în E ale modulelor dintr-un şir de compoziţie al lui E/E_1. □

COROLAR 2.8. *a) Orice submodul şi orice imagine omomorfă a unui modul de lungime finită are lungime finită.*

b) O sumă directă finită de module de lungime finită are lungime finită şi lungimea sa este suma lungimilor sumanzilor.

Rezultatul care urmează arată că noţiunea de modul de lungime finită este o generalizare a noţiunii de spaţiu vectorial finit-dimensional.

PROPOZIŢIE 2.9. *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp K. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) $\dim_K(V) < \infty$,
(*ii*) *V este un K-modul de lungime finită,*
(*iii*) *V este un K-modul noetherian,*
(*iv*) *V este un K-modul artinian.*

Dacă una dintre aceste condiţii este îndeplinită, atunci are loc egalitatea $\dim_K(V) = l_K(V)$.

DEMONSTRAŢIE. Din propoziţia 2.2 ştim deja că (*iii*) şi (*iv*) sunt consecinţe ale condiţiei (*ii*). Pentru a arăta că (*i*) implică (*ii*), se consideră o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pentru V. Spaţiile vectoriale $V_t := Ke_1 + \cdots + Ke_t$, $1 \leq t \leq n$, constituie un şir de compoziţie pentru V. Prin urmare, V este un K-modul de lungime finită. Implicaţiile (*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) şi (*iv*) $\Longrightarrow$ (*i*) au fost stabilite în exemplul 4. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

EXERCIŢII.

1. Dacă E_1 şi E_2 sunt submodule ale unui modul E de lungime finită, atunci $l(E_1 + E_2) + l(E_1 \cap E_2) = l(E_1) + l(E_2)$.

2. Fie E un modul de lungime finită n şi f un endomorfism al lui E. Să se arate că E este suma directă internă dintre Im f^n şi ker f^n.

3. Un modul nenul E se numeşte *indecompozabil* dacă singurii săi sumanzi direcţi sunt modulele improprii 0 şi E. Să se demonstreze că orice modul noetherian sau artinian se poate scrie ca o sumă directă finită de submodule indecompozabile.

4. Fie f un endomorfism al unui modul indecompozabil şi de lungime finită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

 (i) f este monomorfism,
 (ii) f este epimorfism,
 (iii) f este automorfism,
 (iv) $f^n \neq 0$ pentru orice număr natural n.

3. Descompunere primară în module noetheriene

Teoremele de descompunere a unui obiect în componente mai simple sau cu anumite proprietăţi specificate ocupă un loc central în algebră. Posibilitatea de a clasifica obiectele sau de a le manipula mai uşor este întotdeauna atrăgătoare. În această secţiune se arată că fiecare submodul al unui modul noetherian este intersecţia unei familii finite de submodule primare. În forma actuală, demonstraţia este influenţată de viziunea modernă, impusă de Bourbaki, şi este susceptibilă de a fi parafrazată pentru inele necomutative, în categorii sau latici.

3.1. Radicalul unui submodul.

DEFINIŢIE 3.1. Fie A un inel, I un ideal al său, E un A-modul şi F submodul al lui E. Mulţimea

$$(F : I)_E := \{\, x \in E \;:\; ax \in F \text{ pentru orice } a \in I \,\} \tag{3}$$

este numită *transportorul lui I în F*. Mulţimea

$$(F : E)_A := \{\, a \in A \;:\; aE \subseteq F \,\} \tag{4}$$

este numită *câtul lui F prin E*. În cazul particular al submodulului nul, $(0 : I)_E$ este numit *anulatorul lui I în E* şi se notează $\mathrm{Ann}_E I$.

Se verifică imediat că $(F : I)_E$ este submodul al lui E, iar $(F : E)_A$ este un ideal în A. Proprietăţile de mai jos se justifică fără nici o dificultate:

PROPOZIŢIE 3.2. *Fie A un inel, I, J ideale, E un A-modul şi F submodul al lui E. Atunci:*

a) $F \subseteq (F : I)_E$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b) $I(F:I)_E \subseteq F$,
c) $((F:I)_E:J)_E = (F:IJ)_E = ((F:J)_E:I)_E$,
d) pentru orice familie de submodule $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ale lui* E *avem*

$$\Big(\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\big):I\Big)_E = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F_\lambda:I)_E \ ,$$

e) pentru orice familie de ideale $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ale lui* A *avem*

$$\Big(F:\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\Big)_E = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F:I_\lambda)_E \ .$$

DEFINIŢIE 3.3. Numim *rădăcină a lui* F *în* E mulţimea

$$\mathrm{Rad}_E(F) := \{\, a\in A \ :\ \forall x\in E,\ \exists n\in\mathbb{N}\ \text{ astfel ca } a^n x\in F\,\}. \qquad (5)$$

În particular, pentru orice ideal I notăm $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}_A(I)$. Se verifică imediat că $\mathrm{Rad}_E(F)$ este ideal în A care conţine câtul lui F prin E. Alte proprietăţi sunt date în următoarea

PROPOZIŢIE 3.4. *a)* $\mathrm{Rad}_E(F) = A$ *dacă şi numai dacă* $F = E$, *dacă şi numai dacă* $(F:E)_A = A$.
b) Dacă $F' \subseteq F$ *sunt submodule ale lui* E, *atunci*

$$\mathrm{Rad}_E(F') \subseteq \mathrm{Rad}_E(F) \quad \textit{şi} \quad (E:F)_A \subseteq (E:F')_A \ .$$

c) $\mathrm{Rad}_E(F) = \mathrm{Rad}_{E/F}(0)$.
d) $\mathrm{Rad}_E(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n) = \mathrm{Rad}_E(F_1)\cap\ldots\cap\mathrm{Rad}_E(F_n)$.

PROPOZIŢIE 3.5. *Pentru* J *şi* I *ideale ale lui* A *sunt îndeplinite proprietăţile:*
a) Dacă $I\subseteq J$, *atunci* $\mathrm{Rad}(I)\subseteq\mathrm{Rad}(J)$.
b) $\mathrm{Rad}\,(\mathrm{Rad}(I)) = \mathrm{Rad}(I)$.
c) $\mathrm{Rad}(I) = A$ *dacă şi numai dacă* $I = A$.
d) $\mathrm{Rad}(IJ) = \mathrm{Rad}(I\cap J) = \mathrm{Rad}(I)\cap\mathrm{Rad}(J)$.
e) $\mathrm{Rad}(I+J) = \mathrm{Rad}\,(\mathrm{Rad}(I)+\mathrm{Rad}(J))$.

EXEMPLE 1. Fie n un număr întreg supraunitar. Atunci $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z})$ este generat de produsul divizorilor primi ai lui n.
2. $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Z}}(0) = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(0) = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = 0$.
3. $\mathrm{Rad}_A(I) = \{\, a\in A \ :\ \text{există } n\in\mathbb{N} \text{ astfel ca } a^n\in I\,\}$.

Rădăcina idealului nul este formată din acele elemente a ale inelului pentru care există un număr natural n astfel ca $a^n = 0$. Prin urmare, $\mathrm{Rad}_A(0)$ coincide cu idealul format din elementele nilpotente din inel, ideal notat $\mathrm{N}(A)$ şi numit *nilradicalul* inelului.

DEFINIŢIE 3.6. Un ideal se numeşte *radical* dacă el coincide cu rădăcina sa. Un inel este *redus* dacă nu are elemente nilpotente nenule.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Orice ideal prim este ideal radical. Mai general, pentru orice ideal prim P şi orice $n \geq 1$ avem $\text{Rad}\,(P^n) = P$. Pentru orice inel A, inelul $A/\text{N}(A)$ este redus.

PROPOZIŢIE 3.7. *Dacă S este un sistem multiplicativ închis în A, atunci $\text{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\text{N}(A)$. În particular, orice localizat al unui inel redus este inel redus.*

În repetate rânduri vom folosi un rezultat cunoscut sub numele de lema lui Krull:

PROPOZIŢIE 3.8. *(Lema lui Krull) Fie S un sistem multiplicativ închis ce nu conţine 0 şi I un ideal disjunct de S. Atunci există un ideal prim ce conţine I şi este disjunct de S. În particular, orice ideal $I \neq A$ este conţinut într-un ideal maximal.*

DEMONSTRAŢIE. Vom folosi procedeul de zornificare. Notăm cu $\mathcal{L}$ mulţimea idealelor din A care nu taie S şi conţin I. Prin ipoteză $\mathcal{L}$ este nevidă. Vom demonstra că $\mathcal{L}$ ordonată cu relaţia de incluziune este mulţime inductivă. Fie $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ un şir crescător de ideale din $\mathcal{L}$. Atunci $J := \cup\{\, J_n \ : \ n \geq 1\,\}$ este un ideal disjunct de S, conţine I, deci $J \in \mathcal{L}$. Din lema lui Zorn rezultă că $\mathcal{L}$ conţine un element maximal P. Vom arăta că P este ideal prim al lui A.

Fie $b, c \in A\setminus P$ astfel încât $bc \in P$. Deoarece $P+Ab$ şi $P+Ac$ conţin strict idealul P, din maximalitatea lui P ca element al lui $\mathcal{L}$ decurge $(P + Ab) \cap S \neq \emptyset$ şi $(P + Ac) \cap S \neq \emptyset$. Explicit, există $s = p + ax \in S$ şi $t = q + by \in S$, cu x, $y \in A$ şi p, $q \in P$. Prin calcul direct se găseşte $st = (pq + bpy + aqx) + abxy \in P$. Cum S este închisă la înmulţire, $st \in S$, ceea ce contrazice faptul că P şi S nu au elemente în comun.

În cazul particular $I = 0$ şi $S = \{\,1\,\}$, mulţimea $\mathcal{L}$ definită mai sus constă din idealele distincte de întreg inelul. Prin urmare, elementele sale maximale sunt exact idealele maximale ale lui A. Ultima parte a concluziei propoziţiei rezultă folosind această observaţie pentru inelul A/I şi corespondenţa dintre $\text{Spec}\ A/I$ şi $\text{Spec}\ A$. □

O altă proprietate utilă este consemnată în următoarea lemă.

LEMA 3.9. *(Principiul local-global) Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) $E = 0$,

(*ii*) $E_P = 0$ *pentru orice ideal prim* P,

(*iii*) $E_M = 0$ *pentru orice ideal maximal* M.

DEMONSTRAŢIE. Singura implicaţie care necesită justificare este $(iii) \Longrightarrow (i)$. Presupunem că E este un modul nenul ce îndeplineşte condiţia (iii). Se găseşte $x \in E$, $x \neq 0$, deci anulatorul său $\text{Ann}_A\, x$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

este diferit de A. Conform lemei lui Krull, idealul $\mathrm{Ann}_A x$ este conţinut într-un ideal maximal M. Întrucât $x/1 \in E_M = 0$, există $a \in A \setminus M$ cu $ax = 0$. Această relaţie arată $a \in \mathrm{Ann}_A x \subseteq M$, absurd. □

Rezultatul următor arată că proprietatea unui inel de a fi redus este o proprietate locală.

PROPOZIŢIE 3.10. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A este inel redus,*

(*ii*) *A_P este inel redus pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, A$,*

(*iii*) *A_M este inel redus pentru orice $M \in \mathrm{Max}\, A$.*

DEMONSTRAŢIE. La demonstrarea implicaţiei $(iii) \Longrightarrow (i)$ se foloseşte comutarea localizării cu luarea nilradicalului şi faptul că un modul este nul dacă şi numai dacă toate localizatele sale în ideale maximale sunt nule. □

PROPOZIŢIE 3.11. *Fie A un inel şi I un ideal în A. Atunci* $\mathrm{Rad}_A(I)$ *este intersecţia idealelor prime din A care conţin pe I.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinând cont de relaţia c) din propoziţia 3.4 şi de bijecţia dintre idealele lui A care conţin pe I şi idealele inelului A/I, este suficient să arătăm că nilradicalul unui inel A coincide cu intersecţia idealelor prime ale inelului.

Fie a un element nilpotent şi n un număr natural astfel ca $a^n = 0$. Pentru orice ideal prim P avem $a^n \in P$, deci $a \in P$. Aşadar,

$$\mathrm{N}(A) \subseteq \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{Spec}\, A \,\}\ .$$

Pentru a demonstra egalitatea în această incluziune, vom arăta că pentru $a \in A\setminus \mathrm{N}(A)$ se găseşte un ideal prim P care nu conţine a. Considerăm sistemul multiplicativ S constând din elementul unitate al inelului A şi din puterile lui a. În conformitate cu alegerea lui a, S nu conţine elementul nul. Proprietatea dorită rezultă din lema lui Krull. □

DEFINIŢIE 3.12. Un ideal prim P se numeşte *ideal prim minimal* dacă nici un ideal prim nu este conţinut strict în P. Altfel spus, P este un element minimal în mulţimea $\mathrm{Spec}\, A$ ordonată cu relaţia de incluziune. Vom nota cu $\mathrm{Min}\, A$ mulţimea tuturor idealelor prime minimale ale lui A.

Arătăm că fiecare ideal prim conţine cel puţin un ideal prim minimal.

LEMA 3.13. *Pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, A$ există $Q \in \mathrm{Min}\, A$ cu $Q \subseteq P$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că mulţimea

$$\mathcal{L} := \{\, Q \in \operatorname{Spec} A \;:\; Q \subseteq P \,\}$$

ordonată de incluziune este inferior inductivă (altfel spus, $\mathcal{L}$ cu ordinea duală este mulţime inductiv ordonată). Dacă $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ este un lanţ descrescător de ideale din $\mathcal{L}$, notăm $Q := \cap\{\, P_n \;:\; n \geq 1 \,\}$. Evident Q este conţinut în orice P_n, $n \geq 1$. Mai trebuie justificat faptul că idealul Q este prim. Fie a, $b \in A \setminus Q$. Atunci există numere naturale s şi t pentru care $a \notin P_s$, $b \notin P_t$. Notând cu n cel mai mare dintre s şi t, din relaţia $P_n = P_s \cap P_t$ rezultă că $a \notin P_n$ şi $b \notin P_n$. Prin urmare $ab \notin P_n$, şi cu atât mai mult $ab \notin Q$. □

COROLAR 3.14. *a) Radicalul unui ideal I este intersecţia idealelor prime care conţin pe I şi sunt minimale cu această proprietate.*

b) Pentru orice modul E şi F submodul al său, $\operatorname{Rad}_E(F)$ *este intersecţie de ideale prime.*

PROPOZIŢIE 3.15. *Dacă I şi J sunt două ideale astfel încât J este finit generat şi conţinut în* $\operatorname{Rad}(I)$*, atunci I conţine o putere a lui J.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $b_1, \dots, b_n$ un sistem de generatori ai lui J. Pentru fiecare indice $i = 1, \dots, n$ există un număr natural e_i astfel ca $b_i^{e_i} \in I$. Notăm s suma acestor exponenţi şi arătăm că $J^s \subseteq I$. Un element arbitrar $y \in J^s$ este o sumă finită de elemente de forma $x_1 \cdots x_s$, cu $x_j \in J$, iar fiecare x_j este o combinaţie liniară cu coeficienţi din A de elementele $b_1, \dots, b_n$. Prin urmare $x_1 \cdots x_s$ este suma unor termeni de forma $cb_1^{u_1} \cdots b_n^{u_n}$, unde $c \in A$ şi $u_1, \dots, u_n$ sunt numere naturale cu suma s. Pentru cel puţin un indice j avem $u_j \geq e_j$, deci toate produsele ce apar în scrierea lui $x_1 \cdots x_s$ sunt din I. □

Aplicând acest rezultat pentru I ideal arbitrar al unui inel noetherian şi $J = \operatorname{Rad}(I)$, se obţine:

COROLAR 3.16. *Orice ideal al unui inel noetherian conţine o putere a radicalului său.*

PROPOZIŢIE 3.17. *Fie* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ *un şir exact de A-module, F un submodul al lui E, $F'' := g(F)$ şi $F' := f^{-1}(F)$. Atunci*

$$\operatorname{Rad}_E(F) = \operatorname{Rad}_{E'}(F') \cap \operatorname{Rad}_{E''}(F'') \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Fie a un element arbitrar al intersecţiei de ideale din membrul drept. Rezultă că pentru orice $x \in E$ există numărul natural m astfel încât $g(a^m x) = a^m g(x) \in F''$. Aşadar, există $y \in F$ pentru care $a^m x - y \in E'$. Pe de altă parte, există un număr natural

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

t astfel ca $a^t(a^m x - y) \in F'$, deci $a^{m+t}x \in F$. Relaţia fiind valabilă pentru orice $x \in E$, conchidem că

$$\mathrm{Rad}_{E'}(F') \cap \mathrm{Rad}_{E''}(F'') \subseteq \mathrm{Rad}_E(F) \; .$$

Incluziunea contrară se verifică asemănător. □

PROPOZIŢIE 3.18. *Fie S un sistem multiplicativ închis în A, E un A-modul şi $u : A \longrightarrow S^{-1}A$, $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismele canonice.*

a) Dacă F este un A-submodul al lui E, atunci

$$S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F) \subseteq \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F) \; .$$

b) Dacă F' este un $S^{-1}A$-submodul al lui $S^{-1}E$, atunci

$$u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F')\big) = \mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F')) \; .$$

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $b \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$. Atunci $b = a/s$, cu $a \in \mathrm{Rad}_E(F)$ şi $s \in S$. Pentru un element arbitrar $y = e/t \in S^{-1}E$ cu $e \in E$ şi $t \in S$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n e \in F$. Prin urmare $b^n y = a^n e/s^n t \in S^{-1}F$.

b) Pentru $a \in u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F')\big)$ şi $e \in E$ se găseşte $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(a^n e) = u(a)^n \cdot v(e) \in F'$, astfel că $a^n e \in v^{-1}(F')$. Cum e este arbitrar în E, se obţine $a \in \mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F'))$. Fie acum a din $\mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F'))$ şi $e/s \in S^{-1}E$. Conform definiţiei, avem $a^n e \in v^{-1}(F')$ pentru un număr natural n convenabil. Atunci $v(a^n e) = u(a^n)v(e) = u(a^n)\cdot e/s \cdot s/1 \in F'$, ceea ce înseamnă $a \in u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F')\big)$. □

EXEMPLU. Incluziunea demonstrată la punctul a) poate fi strictă. De pildă, pentru $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{Q}$ şi $F = \mathbb{Z}$ avem $S^{-1}\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = S^{-1}0 = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(S^{-1}\mathbb{Z}) = \mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Condiţii suficiente pentru realizarea egalităţii sunt puse în evidenţă în următoarea

PROPOZIŢIE 3.19. *Fie S un sistem multiplicativ închis din inelul A, E un A-modul şi F un submodul al său. Atunci*

$$S^{-1}\,\mathrm{Rad}_E(F) \;=\; \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$$

dacă una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:

α) E este un A-modul de tip finit.

β) din $s \in S$, $x \in E$ şi $sx \in F$ rezultă $x \in F$.

DEMONSTRAŢIE. În notaţiile din propoziţia 3.18, pentru a/s element arbitrar din $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$ şi orice e din E există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a/s)^n \cdot (e/1) \in S^{-1}F$, deci $ta^n e \in F$ pentru $t \in S$ convenabil. În cazul β) rezultă imediat $a^n e \in F$, de unde $a/s \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Presupunem în continuare îndeplinită condiţia α). Considerăm $e_1, \ldots, e_r$ un sistem finit de generatori pentru E. Pentru fiecare indice i, $i = 1, \ldots, r$, există $n_i \in \mathbb{N}$ şi $t_i \in S$ astfel încât $t_i a^{n_i} e_i \in F$. Luând $n := \max\{ n_i : i = 1, \ldots, r \}$ şi $t := \prod_{i=1}^r t_i$, se obţine $ta^n E \subseteq F$ şi deci $ta \in \mathrm{Rad}_E(F)$. Aşadar, $a/s = at/st \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$. □

În continuare arătăm că mulţimea idealelor prime ale unui inel are în mod natural o structură de spaţiu topologic. Această topologie este folosită intens în geometria algebrică.

Pentru orice ideal I al inelului comutativ şi unitar A se notează

$$\mathrm{V}(I) := \{ P \in \text{ Spec } A : I \subseteq P\} .$$

PROPOZIŢIE 3.20. *Aplicaţia de la mulţimea idealelor lui A la mulţimea părţilor lui Spec (A) definită prin asocierea $I \mapsto V(I)$ are următoarele proprietăţi:*

a) $\mathrm{V}(0) = \mathrm{Spec}\ A$, $\mathrm{V}(A) = \emptyset$;

b) dacă $I \subseteq J$, atunci $\mathrm{V}(J) \subseteq \mathrm{V}(I)$;

c) pentru orice familie de ideale $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ avem

$$\mathrm{V}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \mathrm{V}(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}(I_\lambda) \ ;$$

d) $\mathrm{V}(I \cap J) = \mathrm{V}(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$;

e) $\mathrm{V}(I) = \emptyset$ *dacă şi numai dacă $I = A$;*

f) $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(\mathrm{Rad}\,(I))$.

Proprietăţile *a*), *c*) şi *d*) permit să se definească o topologie pe mulţimea Spec A în care mulţimile închise sunt exact mulţimile de forma $\mathrm{V}(I)$, pentru I un ideal în A. Această topologie este numită *topologia spectrală* sau *topologia lui Zariski* pe spaţiul Spec A. În continuare vom considera întotdeauna această topologie pe mulţimea idealelor prime ale inelului A.

Dacă X este o submulţime a lui Spec (A), notăm

$$\mathrm{I}(X) := \cap \{ P : P \in X \} .$$

Evident $\mathrm{I}(X)$ este un ideal în A, $\mathrm{I}(\emptyset) = A$, iar

$$\mathrm{I}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}(X_\lambda)$$

pentru orice familie $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de submulţimi ale lui Spec A. În particular, dacă $X \subseteq Y$, atunci $\mathrm{I}(Y) \subseteq \mathrm{I}(X)$.

PROPOZIŢIE 3.21. *Fie I ideal în A şi $X \subseteq$ Spec A. Atunci:*

a) $\mathrm{V}(I)$ *este o mulţime închisă în spaţiul topologic* Spec (A), *iar* $\mathrm{I}(X)$ *este un ideal radical al lui A.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b) $\mathrm{I}(\mathrm{V}(I)) = \mathrm{Rad}\,(I)$, $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) = \overline{X}$, *închiderea mulţimii* X *în topologia spectrală.*

c) Aplicaţiile I *şi* V *definesc bijecţii descrescătoare, inverse una alteia, între mulţimea mulţimilor închise ale lui* Spec (A) *şi mulţimea idealelor radicale ale lui* A.

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\mathrm{V}(I)$ este mulţime închisă în Spec A conform definiţiei topologiei spectrale. Am văzut că pentru orice ideal I avem

$$\mathrm{Rad}(I) = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{V}(I)\,\}\ ,$$

deci

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X)) = \cap\{P \,:\, \mathrm{I}(X) \subseteq P\}\ .$$

Cum pentru orice $Q \in X$ avem $\mathrm{I}(X) \subseteq Q$, rezultă că toate idealele din X apar printre idealele prime prin intersectarea cărora se obţine $\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X))$. Altfel spus, $\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X)) \subseteq \mathrm{I}(X)$.

b) Din definiţii şi din propoziţia 3.11 rezultă

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}(I)) = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{V}(I)\,\} = \mathrm{Rad}(I)\ .$$

Fie J un ideal al lui A astfel încât $X \subseteq \mathrm{V}(J)$, adică $J \subseteq P$ pentru orice $P \in X$. Atunci $J \subseteq \mathrm{I}(X)$ şi din monotonia aplicaţiei V rezultă $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) \subseteq \mathrm{V}(J)$. Pe de altă parte, $X \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$. Conchidem că $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$ este cea mai mică parte închisă a spaţiului Spec A care conţine X, adică $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) = \bar{X}$.

c) Consecinţă directă a celor demonstrate anterior. □

EXERCIŢII.

1. Determinaţi nilradicalul inelului de polinoame (respectiv, serii formale) într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un inel comutativ.

2. Caracterizaţi inelele în care nilradicalul este un ideal maximal (respectiv minimal).

3. Pentru orice ideale I, J, K ale unui inel A au loc egalităţile:

$$\mathrm{Rad}\,(I + JK) = \mathrm{Rad}\,(I + (J \cap K)) = \mathrm{Rad}\,(I + J) \cap \mathrm{Rad}\,(I + K)\ .$$

4. Dacă $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de mulţimi închise ale spaţiului topologic Spec A, atunci

$$\mathrm{I}\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) = \mathrm{Rad}\,\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}(X_\lambda)\big)\ .$$

5. Dacă I şi J sunt ideale în A, arătaţi că $\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{V}(J) \iff J \subseteq \mathrm{Rad}\,(I) \iff \mathrm{Rad}\,(J) \subseteq \mathrm{Rad}\,(I)$.

6. Să se arate că următoarele condiţii sunt echivalente pentru un spaţiu topologic X:

(i) orice două mulţimi deschise nevide au intersecţia nevidă,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(*ii*) orice mulţime deschisă nevidă a lui X este densă în X,
(*iii*) orice mulţime deschisă a lui X este conexă,
(*iv*) orice două mulţimi închise ale lui X, ambele diferite de X, au reuniunea diferită de X.

Un spaţiu topologic X care îndeplineşte aceste condiţii este numit *ireductibil.*

7. Considerăm spaţiul Spec A înzestrat cu topologia spectrală.

a) Să se arate că o submulţime $Y \subseteq$ Spec A este ireductibilă dacă şi numai dacă $\mathrm{I}(Y) \in$ Spec A.

b) Spec A este un spaţiu ireductibil dacă şi numai dacă singurele elemente $e \in A$ cu $e^2 = e$ sunt $e = 0$ şi $e = 1$.

3.2. Suportul unui modul. O noţiune importantă în algebra comutativă este aceea de suport al unui modul.

DEFINIŢIE 3.22. Fie E un A-modul. Mulţimea

$$\operatorname{Supp}_A E := \{\, P \in \operatorname{Spec} A \ : \ E_P \neq 0 \,\}$$

se numeşte *suportul lui* E.

Întrucât $\operatorname{Supp}_A A = \operatorname{Spec} A$, noţiunea are semnificaţie doar pentru module. Cu ajutorul suportului se pot distinge modulele nule. Principiul local-global poate fi reformulat astfel:

LEMA 3.23. *Un modul este nul dacă şi numai dacă suportul său este mulţimea vidă.*

EXEMPLU. $\operatorname{Supp}_A(A/I) = \mathrm{V}(I)$ pentru orice ideal I al lui A.

Într-adevăr, pentru $P \in \operatorname{Spec} A$ avem echivalenţele $P \in \operatorname{Supp}_A(A/I)$ $\iff (A/I)_P \neq 0 \iff A_P/IA_P \neq 0 \iff IA_P \neq A_P \iff I \cap (A \setminus P) =$ $= \emptyset \iff I \subseteq P \iff P \in \mathrm{V}(I)$.

PROPOZIŢIE 3.24. *Dacă* $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ *este un şir exact de* A*-module, atunci* $\operatorname{Supp}_A F = \operatorname{Supp}_A E \cup \operatorname{Supp}_A G$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice ideal prim P avem şirul exact de A_P-module $0 \longrightarrow E_P \longrightarrow F_P \longrightarrow G_P \longrightarrow 0$, deci $F_P = 0$ dacă şi numai dacă $E_P = 0$ şi $G_P = 0$. □

PROPOZIŢIE 3.25. *Dacă* $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *este o familie de submodule ale unui modul* E*, atunci*

$$\operatorname{Supp}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Supp}(E_\lambda)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Cum localizarea comută cu sumele arbitrare de submodule, pentru orice ideal prim P avem $\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\big)_P = 0$ dacă şi numai dacă $(E_\lambda)_P = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 3.26. *Dacă $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de generatori pentru A-modulul E, atunci*

$$\operatorname{Supp} E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(x_\lambda)) .$$

În particular, dacă E este A-modul finit generat, atunci $\operatorname{Supp} E = \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(E))$ *este o mulţime închisă în topologia Zariski.*

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că $\operatorname{Ann}_A E = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(x_\lambda))$, iar $\mathrm{V}(I\cap J) = \mathrm{V}(I)\cup \mathrm{V}(J)$ pentru orice ideale I, J ale lui A. □

LEMA 3.27. *(Lema de evitare a lui McCoy) Fie $I \leq A$ şi $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 2)$ o familie de ideale dintre care cel mult două nu sunt prime. Dacă I este conţinut în reuniunea idealelor $P_1, \ldots, P_n$, atunci I este conţinut într-unul din aceste ideale.*

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după n. Dacă $n = 2$ şi există $x_j \in I \setminus P_{3-j}$, $j = 1, 2$, atunci $x_j \in P_j$, deci $y := x_1 + x_2 \in I \subseteq P_1 \cup P_2$. Rezultă că y este un element al lui P_1, să spunem, încât $x_2 = y - x_1 \in P_1$, contradicţie.

Presupunem acum că $n \geq 3$ şi că afirmaţia a fost stabilită pentru orice familie cu proprietăţile din enunţ şi de cardinal strict mai mic decât n. În plus, putem presupune $I \not\subseteq \bigcup\{ P_j : 1 \leq j \neq k \leq n\}$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$ (în caz contrar concluzia dorită decurge din ipoteza inductivă). Alegând $x_k \in I \setminus \bigcup\{ P_j : 1 \leq j \neq k \leq n\}$, avem $x_k \in P_k$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Cum $n \geq 3$, există cel puţin un ideal prim în familia considerată, să spunem P_1. Elementul $x_1 + x_2x_3\cdots x_n$ este din I, dar nu din P_1 (întrucât $x_1 \in P_1$, dar $x_2x_3\cdots x_n \notin P_1$) şi nici din P_k, $k \geq 2$ (deoarece $x_1 \notin P_k$ şi $x_2x_3\cdots x_n \in P_k$). □

DEFINIŢIE 3.28. Pentru A inel comutativ şi unitar, intersecţia tuturor idealelor sale maximale se notează $J(A)$ şi este numită *radicalul Jacobson*. Un inel este *local* (resp. *semilocal*) dacă acest inel are un singur ideal maximal (resp. un număr finit de ideale maximale).

Folosind lema de evitare şi corespondenţa dintre idealele S-saturate ale inelului A şi idealele din $S^{-1}A$, se obţine următoarea clasă de exemple de inele semilocale:

LEMA 3.29. *Dacă $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 1)$ sunt ideale prime incomparabile două câte două faţă de incluziune şi $S := \bigcap\{ A\setminus P_i : i = 1, \ldots, n\}$, atunci* $\operatorname{Max} S^{-1}A = \{ S^{-1}P_i : i = 1, \ldots, n\}$.

Elementele din radicalul Jacobson se pot identifica graţie următoarei caracterizări:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

LEMA 3.30. *Fie $x \in A$. Atunci $x \in J(A)$ dacă şi numai dacă $1 - ax$ este inversabil în A pentru orice $a \in A$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x \in J(A)$ şi există $a \in A$ astfel încât $y := 1 - ax$ este neinversabil, rezultă că idealul Ay este diferit de A. Conform lemei lui Krull, există un ideal maximal M ce conţine Ay. Din $x \in M$ şi $1 - ax \in M$ decurge contradicţia $1 \in M$.

Reciproc, dacă $x \notin J(A)$, înseamnă că există un ideal maximal M astfel ca $x \notin M$. Deci $M \subset M + Ax$ şi maximalitatea lui M implică $M + Ax = A$. Prin urmare, se găsesc $a \in A$ şi $b \in M$ astfel încât $1 = b + ax$, relaţie din care conchidem că $1 - ax$ este neinversabil, în contradicţie cu condiţia din enunţ. □

LEMA 3.31. *(Lema lui Nakayama) Dacă E este un A-modul finit generat şi I un ideal conţinut în radicalul Jacobson astfel încât $IE = E$, atunci E este modulul nul.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ un sistem minimal de generatori pentru E. Întrucât mulţimea numerelor naturale este bine ordonată, (*i.e.* orice submulţime nevidă are un cel mai mic element), putem presupune că E nu poate fi generat de mai puţin de n elemente.

Din $x_n \in E = IE$ se obţine o reprezentare $x_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ cu $a_i \in I$ $(1 \leq i \leq n)$. Atunci $(1 - a_n)x_n = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ şi cum $1 - a_n$ este inversabil (a_n fiind din $J(A)$), înseamnă că generatorul x_n este superfluu. Cum sistemul de generatori a fost ales minimal, s-a ajuns la o contradicţie. □

Acest rezultat joacă un rol important în studiul inelelor locale, dar are aplicaţii surprinzătoare şi în alte contexte. Menţionăm câteva consecinţe ale sale.

COROLAR 3.32. *Fie E un A-modul şi F un submodul cu E/F finit generat. Dacă $I \subseteq J(A)$ şi $E = IE + F$, atunci $E = F$.*

DEMONSTRAŢIE. Se foloseşte lema lui Nakayama pentru A-modulul finit generat E/F. □

COROLAR 3.33. *Fie (A, M, K) un inel local şi E un modul de tip finit. Pentru $x_1, \ldots, x_n \in E$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *$x_1, \ldots, x_n$ generează A-modulul E,*
(*ii*) *clasele $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ în E/ME generează K-spaţiul vectorial E/ME.*

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia $(i) \Longrightarrow (ii)$ este clară. Pentru reciprocă se observă că din condiţia (ii) rezultă $E = ME + Ax_1 + \cdots + Ax_n$ şi se aplică rezultatul precedent. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

LEMA 3.34. *(Lema chineză a resturilor) Fie $I_1, \dots, I_n$ $(n \geq 2)$ ideale astfel încât $I_j + I_k = A$ pentru $1 \leq j < k \leq n$. Atunci:*

a) $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = \prod_{j=1}^{n} I_j$,

b) morfismul $\pi : A \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} A/I_j$, $a \mapsto (a + I_1, \dots, a + I_n)$, *este surjectiv şi induce un izomorfism*

$$A/\bigcap_{j=1}^{n} I_j \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} (A/I_j) .$$

DEMONSTRAŢIE. *a)* Evident, intersecţia idealelor conţine produsul lor. Incluziunea inversă se obţine prin inducţie după n. Dacă $n = 2$, atunci

$$I_1 \cap I_2 = (I_1 + I_2)(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1(I_1 \cap I_2) + I_2(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1 I_2 .$$

Presupunem acum $n > 2$ şi că relaţia este adevărată pentru cel mult $n - 1$ ideale comaximale două câte două. Observăm că $I_n + L = A$, unde $L := I_1 \cdots I_{n-1} = I_1 \cap \ldots \cap I_{n-1}$. Într-adevăr, din $I_n + L \neq A$ rezultă existenţa unui ideal maximal M ce conţine $I_n + L$, în particular avem $I_1 \cdots I_{n-1} \subseteq M$. Atunci M conţine un ideal I_j, $1 \leq j < n$. Cum $I_n \subseteq M$, se ajunge la contradicţia $A = I_j + I_n \subseteq M$. Conform cazului $n = 2$, avem

$$\prod_{j=1}^{n} I_j = I_n \prod_{j=1}^{n-1} I_j = I_n L = I_n \cap L = I_n \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} I_j .$$

b) Acum arătăm că pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, există $a_k \in \bigcap_{j \neq k} I_j$ astfel încât $a_k - 1 \in I_k$. Pentru $j \neq k$ există $b_j \in I_k$ şi $c_j \in I_j$ cu suma 1. Atunci elementul $a_k := \prod_{j \neq k} c_j$ are proprietăţile dorite: evident a_k aparţine tuturor idealelor de indice diferit de k, iar $a_k - 1 = \prod_{j \neq k}(1 - b_j) - 1 \in I_k$.

Pentru $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} (A/I_j)$ considerăm câte un reprezentant b_j pentru x_j $(1 \leq j \leq n)$ şi punem $x := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Pentru fiecare $k = 1, \dots, n$ avem $b_k(a_k - 1) \in I_k$ şi $a_j b_j \in I_k$ pentru $1 \leq j \neq k \leq n$, deci $x - b_k \in I_k$. Altfel spus, morfismul π este surjectiv. Din definiţia produsului direct rezultă că nucleul lui π coincide cu produsul idealelor I_k, care nu este altceva decât intersecţia lor conform punctului *a)*. Demonstraţia se încheie aplicând teorema fundamentală de izomorfism pentru inele. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PROPOZIŢIE 3.35. *Dacă E şi F sunt module finit generate peste inelul noetherian A, atunci* $\operatorname{Supp}(E \otimes_A F) = \operatorname{Supp} E \cap \operatorname{Supp} F$.

DEMONSTRAŢIE. Primul pas constă în reducerea la cazul local. Aici este simplu datorită comutării localizării cu tensorizarea:

$$(E \otimes_A F)_P \simeq E_P \otimes_{A_P} F_P \quad \text{pentru orice } P \in \operatorname{Spec} A\ .$$

Apoi se aplică următorul rezultat. □

LEMA 3.36. *Dacă E şi F sunt module nenule de tip finit peste un inel local noetherian (A, M, K), atunci $E \otimes_A F \neq 0$.*

DEMONSTRAŢIE. Pornim de la o prezentare $F \simeq A^n/G$ cu n un număr natural şi cu G un submodul al lui A^n. Imaginile lui G prin proiecţiile canonice ale lui A^n pe sumanzii săi direcţi sunt submodule ale lui A, adică ideale. Nu se poate ca toate aceste ideale să coincidă cu A, pentru că atunci ar rezulta $F = 0$. Obţinem prin urmare un morfism surjectiv $F \longrightarrow A/I$ cu I ideal diferit de întreg inelul. Morfismul $E \otimes_A F \longrightarrow E/IE$ indus prin tensorizare cu E este încă surjectiv. Dacă sursa sa ar fi modulul nul, atunci ar rezulta $E = IE$, ceea ce, conform lemei lui Nakayama, ar conduce la concluzia $E = 0$, în contradicţie cu ipoteza. □

3.3. Ideale prime asociate unui modul.

DEFINIŢIE 3.37. Fie A un inel şi E un A-modul. Un ideal prim P din A se numeşte *asociat lui* E dacă există $x \in E$ astfel încât $P = \operatorname{Ann}_A x$. Mulţimea idealelor prime asociate lui E se notează $\operatorname{Ass}_A E$. O denumire alternativă, uşor macabră şi paradoxală, este *asasin* al modulului E. Dacă F este un submodul al lui E, un element din $\operatorname{Ass}_A(E/F)$ se numeşte *ideal prim asociat lui F în E* sau *divizor prim al lui F în E*.

Observăm că orice ideal prim asociat unui modul conţine anulatorul acelui modul, iar $\operatorname{Ass} E$ coincide cu mulţimea formată din $P \in \operatorname{Spec} A$ pentru care există un submodul al lui E izomorf cu A/P.

LEMA 3.38. *Pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ şi $x \in A/P$, $x \neq 0$, avem* $\operatorname{Ann} x = P$, *deci* $\operatorname{Ass}_A(A/P) = \{P\}$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x = a + P$, cu $a \in A \setminus P$, atunci $bx = 0$ dacă şi numai dacă $ab \in P$. Cum a nu aparţine idealului prim P, această relaţie este echivalentă cu $b \in P$. □

EXEMPLU. Pentru A inelul de polinoame în variabilele X şi Y peste un corp K şi $I := (X^2, XY)$, avem $P := (X, Y) \in \operatorname{Ass}_A(A/I)$, $Q := (X) \in \operatorname{Ass}_A(A/I)$ şi $Q \subset P$. Într-adevăr, se verifică uşor relaţiile $P = (I : (X))_A$ şi $Q = (I : (Y))_A$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

LEMA 3.39. *Pentru orice A-modul E avem*

$$\cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{Ass}_A E \,\} \supseteq \mathrm{Rad}_E\,(0) \cup \mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}_A\, E)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Fie P un ideal prim asociat lui E şi $x \in E$ astfel încât $P = \mathrm{Ann}\ x$. Pentru orice $a \in \mathrm{Rad}_E\,(0)$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n x = 0$, adică $a^n \in \mathrm{Ann}\ x = P$. Rezultă $\mathrm{Rad}_E\,(0) \subseteq P$ pentru orice $P \in \mathrm{Ass}\ E$.

Deoarece orice ideal prim este radical, relaţia

$$\mathrm{Ann}\ E = \cap\,\{\,\mathrm{Ann}\ y \,:\, y \in E\,\} \subseteq \mathrm{Ann}\ x$$

implică $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}\ E) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}\ x) = P$. □

Problema existenţei unor ideale prime asociate unui modul dat are un răspuns clar.

LEMA 3.40. *Fie E un modul peste un inel noetherian A. Atunci E este modulul nul dacă şi numai dacă* $\mathrm{Ass}_A\, E$ *este mulţimea vidă.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă modulul E este nenul, atunci mulţimea de ideale $\{\,\mathrm{Ann}\ x \,:\, x \in E, x \neq 0\,\}$ este nevidă. În conformitate cu condiţia (MAX), această mulţime are un element maximal P. Vom arăta că P este ideal prim.

Fie $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $P = \mathrm{Ann}\ x$ şi a, $b \in A$ cu $b \notin P$, dar $ab \in P$. Relaţiile $abx = 0$, $bx \neq 0$ arată că $a \in \mathrm{Ann}\ (bx)$. Considerând a un element arbitrar al idealului P, conchidem că P este conţinut în anulatorul elementului nenul bx al lui E. Datorită maximalităţii lui P rezultă $P = \mathrm{Ann}\ (bx)$. Acum este limpede că din $abx = 0$ şi $bx \neq 0$ rezultă $a \in P$. □

EXEMPLU. Ipoteza noetherianităţii inelului este esenţială. Să considerăm, de pildă, idealul I generat în inelul $A := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ de pătratele variabilelor şi $E := A/I$. Atunci $\mathrm{Ass}_A\, E = \emptyset$. Într-adevăr, se verifică uşor că singurul ideal prim ce conţine I este idealul generat de variabile. Pentru orice $f \in A/I$ se găseşte un reprezentant dintr-un inel de polinoame într-un număr finit de nedeterminate. Anulatorul acestui reprezentant este conţinut în acelaşi subinel.

Elementele conţinute în idealele asociate unui modul au o proprietate introdusă în următoarea definiţie.

DEFINIŢIE 3.41. Un element $a \in A$ se numeşte *divizor al lui zero în E* dacă există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $ax = 0$. Un element este *regulat pe E* dacă nu este divizor al lui zero pe E.

Mulţimea formată din toţi divizorii lui zero pe un modul E este notată $\mathrm{Z}(E)$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PROPOZIŢIE 3.42. *Dacă A este inel noetherian, atunci reuniunea primelor asociate unui modul E coincide cu mulţimea divizorilor lui zero pe E.*

DEMONSTRAŢIE. Este evident că elementele din orice ideal prim asociat lui E sunt divizori ai lui zero pe E. Reciproc, fie $ax = 0$, unde $a \in A$ şi $x \in E$, $x \neq 0$. Din lema precedentă ştim $\mathrm{Ass}_A(Ax) \neq \emptyset$, deci există $b \in A$ şi $P \in \mathrm{Spec}\, A$ astfel încât $P = \mathrm{Ann}\,(bx)$. Cum $abx = 0$, deducem $a \in P$. □

PROPOZIŢIE 3.43. *Pentru orice submodul F al lui E avem*

$$\mathrm{Ass}\,(F) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E) \subseteq \mathrm{Ass}\,(F) \cup \mathrm{Ass}\,(E/F)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Incluziunea din stânga este evidentă: anulatorul unui element x din F nu se modifică dacă vom considera x ca element al lui E. Fie $P \in \mathrm{Ass}\,(E)\setminus \mathrm{Ass}\,(F)$ şi $x \in E$ astfel ca $P = \mathrm{Ann}\ x$. Cum $Ax \simeq A/P$, din lema 3.38 rezultă $\mathrm{Ass}\,(Ax) = \{P\}$. Conform alegerii lui P avem $Ax \cap F = 0$. Atunci imaginea lui Ax prin morfismul canonic $E \longrightarrow E/F$ este un submodul al lui E/F izomorf cu A/P. În virtutea primei incluziuni, $\{P\} = \mathrm{Ass}_A\,(A/P) \subseteq \mathrm{Ass}_A\,(E/F)$. □

EXEMPLU. Incluziunile nu sunt totdeauna egalităţi.

Fie K un corp, $A := K[X,Y]$ şi şirul exact de A-module

$$0 \longrightarrow (X)/(X^2,XY) \longrightarrow A/(X^2,XY) \longrightarrow A/(X) \longrightarrow 0\ .$$

Din lema 3.38 şi faptul că A-modulul $(X)/(X^2,XY)$ este izomorf cu $A/(X,Y) \simeq K$ rezultă

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}_A\,((X)/(X^2,XY)) &= \{(X,Y)\} \subseteq \mathrm{Ass}_A\,(A/(X^2,XY)) \subseteq \\ &\subseteq \{(X,Y)\} \cup \{(X)\}\ .\end{aligned}$$

În acest caz prima dintre incluziunile de la propoziţia 3.43 este strictă.

Pentru a ne convinge că este posibil ca a doua incluziune să nu fie egalitate, este suficient să considerăm şirul exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. În acest caz este simplu de văzut $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}) = \mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(6\mathbb{Z}) = \{0\}$, $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}\}$.

Alte proprietăţi ale asasinului unui modul sunt date în următoarea

PROPOZIŢIE 3.44. *a) Dacă $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de submodule ale lui E, atunci*

$$\mathrm{Ass}\,\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ass}\,(E_\lambda)\ .$$

b) Două module izomorfe au aceleaşi prime asociate.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

c) Dacă $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de submodule ale lui E, atunci

$$\mathrm{Ass}\,(\oplus_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ass}\,(E_\lambda)\ .$$

d) Dacă $E_1, \ldots, E_n$ $(n \geq 1)$ sunt submodule ale lui E a căror intersecţie este modulul nul, atunci

$$\mathrm{Ass}\ (E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Ass}\,(E_i)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. a) Consecinţă directă a definiţiilor.

b) Rezultă din faptul că anulatorul oricărui element dintr-un modul coincide cu anulatorul elementului corespunzător din celălalt modul.

c) Cu ajutorul relaţiei de la punctul a) ne reducem la cazul în care Λ este o mulţime finită, când se raţionează prin inducţie. Pasul iniţial al raţionamentului inductiv (Λ are doar două elemente) este consecinţă a propoziţiei precedente:

$$\mathrm{Ass}\,(E_i) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E_1 \oplus E_2) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E_1) \cup \mathrm{Ass}\,(E_2)\ ,\ i = 1, 2\ .$$

Când sunt $n \geq 3$ submodule, se raţionează asemănător.

d) Ipoteza asigură injectivitatea compunerii aplicaţiilor canonice

$$E \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(E/E_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(E/E_i)\ .$$

Se aplică proprietatea de la punctul c) şi propoziţia 3.43. □

EXEMPLU. Incluziunea de la punctul d) nu este valabilă pentru o familie infinită de submodule: când p parcurge numerele naturale prime avem $\bigcap_p p\mathbb{Z} = 0$, $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}) = \{\,0\,\}$, în vreme ce

$$\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\oplus_p\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \bigcup_{p}\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}\ .$$

În continuare vom studia comportarea asasinului la luarea fracţiilor.

PROPOZIŢIE 3.45. *Fie E un modul peste un inel noetherian A şi S un sistem multiplicativ închis din A. Atunci*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}\,(S^{-1}E) = \{\,S^{-1}P\ :\ P \in \mathrm{Ass}_A\,(E)\ ,\ P \cap S = \emptyset\}\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru $P \in \mathrm{Ass}_A\,(E)$ disjunct de S există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $P = \mathrm{Ann}_A\,x$. Cum $S^{-1}P$ rămâne ideal prim în inelul de fracţii şi $S^{-1}P = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}\,(x/1)$, avem $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}\,(S^{-1}E)$.

Reciproc, fie $P \in \mathrm{Spec}\ A$ astfel ca P să fie disjunct de S şi $S^{-1}P \in$ $\in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}\,(S^{-1}E)$. Să presupunem $S^{-1}P = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}\,(x/t)$ pentru x în E şi $t \in S$. Fie $a_1, \ldots, a_n$ un sistem de generatori ai lui P. Din

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

relaţiile $a_i/1 \cdot x/t = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că există $s_i \in S$ astfel încât $a_i s_i x = 0$. Atunci $s := s_1 s_2 \cdots s_n \in S$ şi $P \subseteq \mathrm{Ann}_A(sx)$. Pentru $b \in \mathrm{Ann}_A(sx)$ arbitrar, din $bsx/t = 0$ rezultă $bs/1 \in \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(x/t) = S^{-1}P$. Cum s nu aparţine lui P, se deduce $b \in P$. Avem, aşadar, $P = \mathrm{Ann}_A(sx) \subseteq \mathrm{Ass}_A(E)$. □

Există o strânsă legătură între asasinul şi suportul unui modul.

PROPOZIŢIE 3.46. *Dacă E este modul peste un inel noetherian A, atunci* $\mathrm{Supp}\, E = \cup\{ V(P) : P \in \mathrm{Ass}(E)\}$. *În particular,* $\mathrm{Ass}(E) \subseteq \mathrm{Supp}\, E$ *şi cele două mulţimi au aceleaşi elemente minimale. Aşadar,* $\mathrm{Min}\, E \subseteq \mathrm{Ass}(E)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $P \in \mathrm{Ass}(E)$ şi $Q \in V(P)$, adică Q este un ideal prim din A şi $Q \supseteq P$. Din relaţia $P \cap (A \setminus Q) = \emptyset$ şi din propoziţia precedentă rezultă $PA_Q \in \mathrm{Ass}_{A_Q}(E_Q)$. Lema 3.40 implică E_Q este modul nenul, ceea ce înseamnă că idealul prim Q aparţine suportului lui E.

Fie acum $Q \in \mathrm{Supp}(E)$. Cum E_Q este modul nenul peste inelul noetherian A_Q, din lema 3.40 se deduce $\mathrm{Ass}_{A_Q}(E_Q) \neq \emptyset$. Din propoziţia precedentă rezultă existenţa unui ideal prim P asociat lui E disjunct de $A \setminus Q$, ceea ce înseamnă $Q \in V(P)$. □

PROPOZIŢIE 3.47. *Fie E un modul nenul şi finit generat peste un inel noetherian A. Atunci există un lanţ de submodule*

$$E = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n = 0$$

astfel încât $E_i/E_{i+1} \simeq A/P_i$ cu $P_i \in \mathrm{Spec}\, A$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n-1$. În plus $\mathrm{Ass}(E) \subseteq \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\} \subseteq \mathrm{Supp}\, E$, *iar cele trei mulţimi au aceleaşi elemente minimale, care coincid cu elementele minimale din* $V(\mathrm{Ann}_A(E))$.

DEMONSTRAŢIE. Conform lemei 3.40, E conţine un submodul izomorf cu A/P, unde P este un ideal prim asociat lui E. Aceasta înseamnă că mulţimea $\mathcal{L}$ a submodulelor nenule ale lui E care îndeplinesc concluzia propoziţiei este nevidă. Cum E este modul noetherian, mulţimea $\mathcal{L}$ are un element F maximal faţă de incluziune.

Dacă $F \neq E$, atunci E/F conţine un submodul de forma A/P, cu $P \in \mathrm{Spec}\, A$. Preimaginea sa F' în F prin morfismul canonic de la E la E/F este un element din $\mathcal{L}$ care conţine strict F, ceea ce contrazice maximalitatea lui F. S-a obţinut $E \in \mathcal{L}$.

Prin aplicarea repetată a propoziţiei 3.43 se găseşte că $\mathrm{Ass}(E)$ este conţinut în mulţimea $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$. Pentru orice i, $0 \leq i < n$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

avem

$$P_i \in \operatorname{Supp}_A(A/P_i) = \operatorname{Supp}_A(E_i/E_{i+1}) \subseteq \operatorname{Supp}_A(E) = \operatorname{V}(\operatorname{Ann}_A(E)) \ .$$

Ultima afirmaţie rezultă din faptul că Ass (E) şi Supp E au aceleaşi elemente minimale. □

EXERCIŢII.

1. Fie A un inel şi $a \in A$. Să se arate că a este nilpotent dacă şi numai dacă este divizor al lui zero pe orice A-modul.

2. Să se decidă dacă următoarele proprietăţi sunt sau nu echivalente pentru orice modul E de tip finit peste un inel noetherian A:

   (i) E este modul de lungime finită,
   (ii) Ass $E =$ Supp E.

3. Fie A inel noetherian, E un A-modul, F submodul şi P un divizor prim al lui F în E. Să se arate că dacă P nu conţine $\operatorname{Ann}_A(F)$, atunci P este asociat lui E.

4. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A. Să se arate că pentru orice A-modul F avem

$$\operatorname{Ass}_A\big(\operatorname{Hom}_A(E,F)\big) = \operatorname{Ass}_A(F) \cap \operatorname{Supp}_A(E) \ .$$

5. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A. Dacă un ideal I constă numai din divizori ai lui zero pe E, atunci există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel ca $I \subseteq \operatorname{Ann} x$.

6. Dacă un ideal al unui inel noetherian conţine un element regulat, acel ideal este generat de elementele regulate pe care le conţine. Este această proprietatea îndeplinită în orice inel?

3.4. Submodule primare. În restul secţiunii A va fi un inel noetherian.

DEFINIŢIE 3.48. Fie E un A-modul şi F un submodul. Se spune că F este *submodul primar al lui* E dacă $\operatorname{Ass}_A(E/F)$ constă dintr-un singur element. Dacă $\operatorname{Ass}_A(E/F) = \{\, P \,\}$, se spune că F este P-primar.

Următorul rezultat dă o caracterizare a submodulelor primare.

PROPOZIŢIE 3.49. *Fie A un inel noetherian, E un modul finit generat şi F un submodul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *F este submodul primar al lui E,*
(ii) *orice divizor al lui zero pe E/F este nilpotent,*
(iii) *dacă $a \in A$ şi $x \in E$ sunt astfel încât $ax \in F$, rezultă că $a \in \operatorname{Rad}_E(F)$ sau $x \in F$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Este evidentă echivalenţa condiţiilor (*ii*) şi (*iii*). Dacă F este P-primar, atunci $\mathrm{Z}(E/F) = P$ şi $\mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}_A(E/F)) = P$. Astfel se obţine că (*i*) implică (*ii*).

Să presupunem că afirmaţia (*ii*) este îndeplinită. De aici şi din propoziţiile 3.11 şi 3.42 rezultă

$$\cup\{P : P \in \mathrm{Ass}\,(E/F)\} = \mathrm{Z}(E/F) = \mathrm{N}(E/F) = \cap\{P : P \in \mathrm{Ass}\,(E/F)\}.$$

Egalitatea termenilor extremi în acest şir de egalităţi poate avea loc doar dacă Ass (E/F) constă dintr-un singur element. Conform definiţiei, aceasta înseamnă că F este submodul primar al lui E. □

LEMA 3.50. *Intersecţia unei familii finite de submodule P-primare ale lui E este un submodul P-primar.*

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să stabilim această proprietate pentru două submodule P-primare, să spunem F şi G. Considerăm şirul exact de A-module

$$0 \longrightarrow F/(F \cap G) \longrightarrow E/(F \cap G) \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

în care $F/(F \cap G) \simeq (F+G)/G$. Concluzia dorită rezultă din faptul că Ass $(E/(F \cap G))$ este o submulţime nevidă a mulţimii

$$\mathrm{Ass}\,(F/(F \cap G)) \cup \mathrm{Ass}\,(E/F) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E/F) \cup \mathrm{Ass}\,(E/G) = \{\,P\,\}\ .$$

□

DEFINIŢIE 3.51. Un submodul $F \subset E$ se numeşte *ireductibil în E* dacă satisface condiţia: pentru orice submodule E_1, E_2 ale lui E astfel încât $F = E_1 \cap E_2$, avem $F = E_1$ sau $F = E_2$.

Este evident că F este ireductibil în E dacă şi numai dacă submodulul nul este ireductibil în E/F.

LEMA 3.52. *Dacă F este un submodul ireductibil în E, atunci F este submodul primar al lui E.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă Ass (E/F) ar conţine două ideale prime distincte P_1 şi P_2, atunci E/F ar conţine submodule $U_1 \simeq A/P_1$ şi $U_2 \simeq A/P_2$. Observăm că $U_1 \cap U_2 = 0$ întrucât orice element nenul al lui U_i are anulatorul P_i. Cum submodulul nul al lui E/F este ireductibil, rezultă $U_1 = 0$ sau $U_2 = 0$, ceea ce este imposibil. Aşadar, Ass (E/F) constă dintr-un singur ideal prim. □

EXEMPLE. 1. Orice ideal prim P al unui inel noetherian este ideal P-primar (conform lemei 3.38).

2. Dacă F este un submodul al lui E cu $M := \mathrm{Rad}_E(F)$ ideal maximal, atunci F este submodul M-primar al lui E. În particular, orice putere a unui ideal maximal este ideal primar. De asemenea, dacă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

în A există un singur ideal prim, atunci orice submodul propriu al unui A-modul arbitrar este primar.

Într-adevăr, să considerăm $a \in A$ şi $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Dacă $a \notin \mathrm{Rad}_E(F) = M \in \mathrm{Max}\, A$, atunci $M + aA = A$. Prin urmare există $b \in M$ şi $c \in A$ astfel ca $1 = b + ac$. Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $b^n x \in F$. Ridicând la puterea n relaţia $1 = b + ac$, se obţine $1 = b^n + ad$, unde $d \in A$. Înmulţind această relaţie cu x, rezultă $x = b^n x + d(ax) \in F$.

3. Într-un inel principal, idealele primare sunt 0 şi idealele generate de puteri de elemente prime.

Dacă p este un element prim în inelul principal A şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $p^n A$ este ideal primar întrucât $\mathrm{Rad}_A(p^n A) = pA$ şi din $ab \in p^n A$ cu a, $b \in A$ rezultă $a \in pA$ sau $b \in p^n A$ pentru că A este inel factorial. Reciproc, fie aA un ideal nenul şi $a = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ descompunerea în factori primi distincţi a generatorului său. Dacă $t > 1$, relaţiile $p_1^{e_1}(p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}) \in aA$, $p_1^{e_1} \notin \mathrm{Rad}_A(aA) = p_1 p_2 \cdots p_t A$ şi $p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t} \notin aA$ arată că aA nu este ideal primar.

4. Nu orice ideal primar este putere de ideal prim.

Fie K un corp, $A := K[X, Y]$ şi $I := (X^2, Y)A \leq A$. Avem

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}_A(I) &= \mathrm{Rad}_A(X^2 A + YA) = \mathrm{Rad}_A(\mathrm{Rad}_A(X^2 A) + \mathrm{Rad}_A(YA)) = \\ &= \mathrm{Rad}_A(XA + YA) = (X, Y)A =: M \in \mathrm{Max}\ A\ , \end{aligned}$$

deci I este M-primar. Cum $Y \in I \setminus M^2$, $X \in M \setminus I$, există incluziuni stricte $M^2 \subset I \subset M$.

5. O putere a unui ideal prim nu este neapărat ideal primar.

Fie K un corp, $A := K[X, Y, Z]/(XY - Z^2) = K[x, y, z]$ şi idealul $P := (x, z)A$. Deoarece $A/P \simeq K[Y]$, avem $P \in \mathrm{Spec}\ A$. Relaţiile $xy = z^2 \in P^2$, $x \notin P^2$ şi $y \notin \mathrm{Rad}_A(P^2) = P$ arată că P^2 nu este ideal primar. Să dovedim $x \notin P^2$. În caz contrar am avea

$$X \in (X^2, XZ, Z^2, XY - Z^2)K[X, Y, Z] = (X^2, XZ, XY, Z^2)K[X, Y, Z]\,,$$

adică ar exista polinoame f_1, f_2, f_3, $f_4 \in K[X, Y, Z]$ astfel încât $X = X^2 f_1 + XY f_2 + f_3 XZ + f_4 Z^2$. Înlocuind în această relaţie Y şi Z cu 0, se obţine $X = X^2 f_1(X, 0, 0)$, egalitate ce nu poate avea loc (consideraţi gradele polinoamelor din cei doi membri). Analog se justifică relaţia $y \notin P$.

În continuare studiem comportarea submodulelor primare la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

LEMA 3.53. *Fie F un submodul P-primar în E. Pentru orice ideal I din A astfel încât $(F : I)_E \neq E$, submodulul $(F : I)_E$ este P-primar în E.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Fie $x \in E$ şi $b \in A \setminus \mathrm{Rad}_E((F:I)_E)$ astfel ca $bx \in (F:I)_E$. Atunci $abx \in F$ pentru orice $a \in I$ şi cum $\mathrm{Rad}_E(F) \subseteq \subseteq \mathrm{Rad}_E((F:I)_E)$, rezultă $ax \in F$, adică $x \in (F:I)_E$. □

LEMA 3.54. *Fie E un modul de tip finit şi F un submodul P-primar al lui E. Atunci $(F:E)_A$ este ideal P-primar.*

DEMONSTRAŢIE. Cum $\mathrm{Rad}_A((F:E)_A) \subseteq \mathrm{Rad}_E(F) = \{P\}$, avem $\mathrm{Rad}_A((F:E)_A) = P$. Fie a, $b \in A$ astfel încât $ab \in (F:E)_A$. Dacă $a \notin P$, atunci $abx \in F$ pentru orice $x \in E$ şi, întrucât F este P-primar, rezultă $bx \in F$. Conchidem $b \in (F:E)_A$. □

PROPOZIŢIE 3.55. *Fie $g : E \longrightarrow E''$ un morfism surjectiv de A-module. Un submodul F al lui E care conţine nucleul lui g este submodul P-primar al lui E dacă şi numai dacă $F'' := g(F)$ este submodul P-primar în E''.*

DEMONSTRAŢIE. Se observă că $\mathrm{Rad}_E(F) = \mathrm{Rad}_{E''}(F'')$. Apoi se stabileşte că pentru orice $a \in A$ şi $x \in E$, apartenenţa $ax \in F$ este echivalentă cu $ag(x) \in F''$, iar $x \in F$ dacă şi numai dacă $g(x) \in F''$. □

PROPOZIŢIE 3.56. *Fie S un sistem multiplicativ închis în inelul A şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic.*

a) Dacă F este submodul P-primar în E şi $P \cap S = \emptyset$, atunci $S^{-1}F$ este submodul $S^{-1}P$-primar al lui $S^{-1}E$, iar $v^{-1}(S^{-1}F) = F$.

b) Dacă F este submodul P-primar în E şi $P \cap S \neq \emptyset$, atunci $S^{-1}F = S^{-1}E$.

c) Dacă F' este submodul primar al $S^{-1}A$-modulului $S^{-1}E$, atunci $v^{-1}(F')$ este submodul primar al A-modulului E.

DEMONSTRAŢIE. a) Prima afirmaţie rezultă din comportarea asasinului la localizare. Pentru ultima parte, reamintim că

$$v^{-1}(S^{-1}F) = \{ x \in E : \text{există } s \in S \text{ astfel încât } sx \in F \}$$

şi că P este mulţimea divizorilor lui zero pe E/F.

b) Fie $s \in S \cap P$. Pentru orice $x \in E$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $s^n x \in F$, deci $s^n v(x) \in v(F)$, încât $v(x) \in S^{-1}F$.

c) Notăm $F := v^{-1}(F')$ şi $u : A \longrightarrow S^{-1}A$ morfismul canonic. Deoarece F' este modul primar, $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')$ este un ideal prim în $S^{-1}A$. Din ipoteza că elementele lui S sunt nondivizori ai lui zero pe E/F şi din propoziţia 3.19 rezultă $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F') = S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$ şi $u^{-1}(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')) = \mathrm{Rad}_E(F)$. Fie $a \in A \setminus \mathrm{Rad}_E(F)$ şi $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Atunci $u(a)v(x) \in F'$ şi $u(a) \notin \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')$, deci $v(x)$ aparţine lui F'. Prin urmare $x \in v^{-1}(F') = F$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEFINIŢIE 3.57. Un submodul F al lui E are o *descompunere primară* dacă există submodulele primare $F_1, \ldots, F_n$ $(n \geq 1)$ ale lui E astfel încât $F = F_1 \cap \ldots \cap F_n$. O astfel de descompunere primară este numită *redusă* dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

a) Dacă F_i este P_i-primar, atunci $P_i \neq P_j$ pentru $1 \leq i < j \leq n$.
b) $\cap\{ F_j : j \neq i \} \not\subseteq F_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

Submodulele F_i ce apar într-o descompunere primară redusă a lui F se numesc *componentele primare ale lui* F.

Cum inelul A este presupus noetherian, din orice descompunere primară a lui F se obţine o descompunere primară redusă astfel: înlocuind toate submodulele primare F_i care au acelaşi radical prin intersecţia lor se asigură satisfacerea condiţiei *a*) (*cf.* lema 3.50), iar pentru a obţine *b*) se omit modulele superflue (care conţin intersecţia celorlalte).

Existenţa descompunerilor primare este asigurată în condiţii destul de generale:

TEOREMA 3.58. *Orice submodul al unui modul E de tip finit peste un inel noetherian A are o descompunere primară.*

DEMONSTRAŢIE. Conform lemei 3.52, este suficient să arătăm că F este intersecţia unei familii finite de submodule ireductibile în E. În caz contrar, din condiţia maximală pe modulul noetherian E rezultă că există un submodul F, maximal cu proprietatea că nu este intersecţia unui număr finit de submodule ireductibile. În particular, acest F nu este ireductibil, deci coincide cu intersecţia a două submodule F_1 şi F_2 ale lui E care conţin strict F. Din alegerea lui F rezultă că fiecare F_i este intersecţia unei familii finite de submodule ireductibile. Aceeaşi proprietate o are şi $F_1 \cap F_2 = F$, contradicţie. □

Folosind un alt raţionament, se poate arăta că rezultatul se menţine pentru module noetheriene peste inele arbitrare.

După ce am tranşat chestiunea existenţei unei descompuneri primare, se pune problema unicităţii sale.

TEOREMA 3.59. *Fie A inel noetherian, E un A-modul şi $F \subset E$ un submodul ce admite o descompunere primară redusă $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n$, $n > 1$, cu F_i submodul P_i-primar în E. Atunci:*

a) $\mathrm{Ass}\,(E/F) = \{ P_1, \ldots, P_n \}$.

b) *Dacă P_i $(1 \leq i \leq n)$ este minimal în* $\mathrm{Ass}\,(E/F)$, *$S = A \setminus P_i$ şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ este morfismul canonic, atunci $F_i = v^{-1}(v(F_i))$.*
Aşadar, componenta primară a lui F corespunzătoare unui prim asociat minimal este unic determinată de E şi F.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. *a*) Notăm $Q_i := \cap\{ F_j : j \neq i \}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Atunci $F = F_i \cap Q_i$ şi $F \neq Q_i$. Din $Q_i/F \simeq (Q_i + F_i)/F_i \subseteq E/F_i$ rezultă

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}(Q_i/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/F_i) = \{ P_i \} ,$$

ceea ce împreună cu $\mathrm{Ass}(Q_i/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/F)$ implică $\{ P_1, \ldots, P_n \} \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Ass}(E/F)$.

Pentru a demonstra incluziunea reciprocă folosim un raţionament prin inducţie după n. Cazul $n = 1$ nu necesită justificare. Fie $n > 1$ şi presupunem că egalitatea *a*) este valabilă pentru toate submodulele lui E cu cel mult $n - 1$ componente primare. Cum Q_i are o astfel de descompunere primară redusă, din ipoteza de inducţie rezultă $\mathrm{Ass}(E/Q_i) = \{ P_j : 1 \leq j \neq i \leq n \}$. Izomorfismul existent între E/Q_i şi $(E/F)/(Q_i/F)$ implică

$$\mathrm{Ass}(E/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/Q_i) \cup \mathrm{Ass}(Q_i/F) = \{P_1, \ldots, P_n \} .$$

b) Din minimalitatea lui P_i în $\mathrm{Ass}(E/F)$ rezultă $S \cap P_j \neq \emptyset$ pentru $j \neq i$. Propoziţia 3.56 asigură $v(F) = S^{-1}F = S^{-1}F_i = v(F_i)$ şi prin urmare $F_i = v^{-1}(v(F_i)) = v^{-1}(v(F))$. □

Dacă F_i este o componentă primară a lui F al cărei radical nu este element minimal în $\mathrm{Ass}(E/F)$, se spune că F_i este *componentă primară scufundată* a lui F. În general, componentele primare scufundate nu sunt unic determinate.

EXEMPLU. În inelul de polinoame $K[X,Y]$ peste un corp K avem $I := (X^2, XY) = (X) \cap (X^2, Y)$. Cum (X) este ideal prim, iar (X^2, Y) este primar (având radicalul $M := (X,Y)$ ideal maximal), s-a găsit o descompunere primară redusă. Raţionând analog, se vede că $(X^2, XY) = (X) \cap (X^2, X + Y)$ este o altă descompunere primară redusă a lui I. Idealul M-primar $(X^2, X + Y)$ nu coincide cu (X^2, Y) întrucât ultimul ideal nu conţine $X + Y$.

Ca aplicaţie a descompunerii primare, prezentăm un rezultat celebru al lui Krull, pentru a cărui demonstraţie avem nevoie de următorul rezultat:

LEMA 3.60. *Fie I un ideal al unui inel noetherian şi $J := \bigcap_{n \geq 1} I^n$. Atunci $I \cdot J = J$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $I = A$, nu avem nimic de demonstrat. Fie deci $I \neq A$. Din $I \cdot J \subseteq I \subset A$ rezultă că idealul $I \cdot J$ are o descompunere primară de forma

$$I \cdot J = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i, \quad Q_i \quad \text{ideal } P_i\text{-primar} .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru acei indici i, $1 \leq i \leq r$, pentru care $I \subseteq P_i$ se consideră $e_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $P_i^{e_i} \subseteq Q_i$ şi se deduce $J \subseteq I^{e_i} \subseteq P_i^{e_i} \subseteq Q_i$. Pentru ceilalţi indici i există $a_i \in I \setminus P_i$ şi cum idealul $a_i J$ este conţinut în idealul P_i-primar Q_i, rezultă $J \subseteq Q_i$. Aşadar, $J \subseteq \bigcap_{i=1}^r Q_i = I \cdot J$. Pe de altă parte, întotdeauna produsul unor ideale este conţinut în intersecţia lor. □

TEOREMA 3.61. *(Teorema de intersecţie a lui Krull) Fie A un inel noetherian, I un ideal şi E un A-modul noetherian. Atunci $\bigcap_{n\geq 1} I^n E$ coincide cu mulţimea elementelor din E al căror anulator conţine un element de forma $1-a$, cu $a \in I$. În cazul în care I este conţinut în radicalul Jacobson al inelului, avem $\bigcap_{n\geq 1} I^n E = 0$.*

DEMONSTRAŢIE. Este clar că pentru $x \in E$ şi $a \in I$ cu $(1-a)x = 0$ avem $x = ax = xa^2 = xa^n$, pentru orice număr natural $n \geq 1$, deci $x \in \bigcap_{n\geq 1} I^n E$. Incluziunea reciprocă este consecinţa rezultatului următor. □

PROPOZIŢIE 3.62. *Fie A un inel, E un modul noetherian şi F un submodul. Pentru orice ideal I din A există un submodul G al lui E cu $\mathrm{Rad}_E(G) \supseteq I$ şi $G \cap F = IF$. Dacă în plus A este inel noetherian, atunci există un număr întreg $n \geq 1$ astfel încât $I^n E \cap F \subseteq IF$.*

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea $\mathcal{L}$ a submodulelor lui E a căror urmă pe F coincide cu IF este nevidă (conţine IF) şi inductiv ordonată cu relaţia de incluziune. Vom arăta că un element maximal $G \in \mathcal{L}$ are proprietăţile cerute. Rămâne să verificăm incluziunea $I \subseteq \mathrm{Rad}_E(G)$. Dacă această relaţie nu are loc, se găseşte $a \in I \setminus \mathrm{Rad}_E(G)$. Lanţul crescător de submodule ale modulului noetherian E

$$G \subseteq (G : Aa)_E \subseteq (G : Aa^2)_E \subseteq \dots$$

este staţionar. Fie r un număr natural nenul la care lanţul considerat staţionează: $(G : Aa^r)_E = (G : Aa^{r+1})_E$. Este suficient să arătăm că are loc egalitatea

$$G = (G + a^r E) \cap (G : Aa^r)_E \ . \tag{6}$$

Într-adevăr, avem $F \subseteq (G : I)_E \subseteq (G : Aa^r)_E$ întrucât $IF \subseteq G$, prin urmare $F \cap (G + a^r E) \subseteq (G : Aa^r)_E \cap (G + a^r E) = G$. De aici rezultă $F \cap (G + a^r E) \subseteq G \cap F = IF$. Din $IF \subseteq G$ se obţine $IF \subseteq F \cap (G + a^r E)$, încât $G + a^r E \in \mathcal{L}$. Relaţia $a \notin \mathrm{Rad}_E(G)$ arată că G este conţinut strict în $G + a^r E$. S-a contrazis astfel maximalitatea lui G în $\mathcal{L}$.

Trecând la demonstrarea relaţiei (6), notăm că G este conţinut în fiecare dintre modulele din membrul drept al acestei relaţii. Dacă $x = y + a^r z$, cu $y \in G$, $z \in F$, şi dacă $x \in (G : Aa^r)_E$, atunci

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$a^r x = a^r y + a^{2r} z \in G$, deci $z \in (G : Aa^{2r})_E = (G : Aa^r)_E$. Prin urmare $a^r z \in G$ şi în consecinţă $x = y + a^r z \in G$. □

EXERCIŢII.

1. Un inel noetherian este redus dacă şi numai dacă toate componentele primare ale idealului nul sunt ideale prime.

2. Fie $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E, $S \subset A$ un sistem multiplicativ închis şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic. Dacă $F_1, \ldots, F_s$, $s \leq n$, sunt toate componentele primare ale lui F cu proprietatea $\mathrm{Rad}_E(F_i) \cap S = \emptyset$, atunci $v^{-1}(v(F)) = \bigcap_{i=1}^{s} F_i$.

3. Dacă $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ este o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E cu F_i submodul P_i-primar, $i = 1, \ldots, n$, atunci $\mathrm{Ass}(F_i/F) = \mathrm{Ass}(E/F) \setminus \{ P_i \}$ pentru orice i, $1 \leq i \leq n$.

4. Structura inelelor artiniene

Inelele artiniene, apărute ca urmare a unui exerciţiu de logică formală—dualizarea relaţiei de incluziune, s-au dovedit a fi în multe circumstanţe un substitut pentru corpuri. Proprietăţile lor intervin decisiv în construirea unei teorii a dimensiunii pentru inele comutative. În încheierea acestui capitol prezentăm structura inelelor artiniene.

LEMA 4.1. *Orice nondivizor al lui zero dintr-un inel artinian este inversabil. În particular, un inel artinian care este domeniu de integritate este de fapt corp.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru un astfel de element a, şirul $aA \supseteq a^2 A \supseteq a^3 A \supseteq \ldots$ este staţionar. Dacă $a^n A = a^{n+1} A$, atunci $a^n = a^{n+1} b$ pentru un anumit $b \in A$. Cum a este nondivizor al lui zero, se poate simplifica cu a^n în ultima egalitate, rezultând $ab = 1$. □

LEMA 4.2. *Într-un inel artinian există doar un număr finit de ideale prime.*

DEMONSTRAŢIE. Observăm mai întâi că din lema precedentă şi din faptul că o imagine omomorfă a unui inel artinian este încă inel artinian rezultă că orice ideal prim al unui astfel de inel este maximal. Să presupunem că spectrul inelului artinian A nu este finit. Atunci există o mulţime infinită de ideale prime $(P_n)_{n \geq 1}$. Lanţul descendent $P_1 \supset P_1 \cap P_2 \supset P_1 \cap P_2 \cap P_3 \supset \ldots$ nu este staţionar întrucât orice ideal prim este maximal. Contradicţia la care s-a ajuns provine din presupunerea că Spec A este mulţime infinită. □

LEMA 4.3. *Radicalul Jacobson J al unui inel artinian este nilpotent, i.e. există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^t = 0$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Folosind lema 4.1, se deduce

$$J = \cap \{ P : P \in \operatorname{Max} A \} = \cap \{ P : P \in \operatorname{Spec} A \} ,$$

adică orice element al radicalului este nilpotent. Cum nu ştim că J este finit generat, nu putem conchide că exponenţii începând de la care se anulează puterile elementelor lui J sunt majoraţi de aceeaşi constantă. Din faptul că A este inel artinian rezultă că există un număr natural t astfel ca $J^t = J^{t+1} =: I$. Vom arăta că I este idealul nul.

Observăm că $I^2 = I$. Presupunând $I \neq 0$, din $I^2 = I \neq 0$ rezultă că mulţimea $\mathcal{L}$ constituită din idealele neconţinute în anulatorul lui I este nevidă. Fie L un element minimal al lui $\mathcal{L}$. Din $IL \neq 0$ rezultă că există $a \in L$ astfel ca $aI \neq 0$. Din alegerea lui L se deduce $L = aA$. Cum $aJ \supseteq aI \neq 0$ şi $aIJ = aJ^tJ = aI \neq 0$, rezultă $aJ = aA = L$. Prin urmare $a = ab$, cu $b \in J$, şi atunci $a = ab = a^n b$ pentru orice $n \geq 1$. Dar ştim deja că b, ca orice alt element al lui J, este nilpotent. Am ajuns astfel la contradicţia $a = 0$. □

PROPOZIŢIE 4.4. *Pentru un modul de tip finit E peste inelul noetherian A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *E este modul de lungime finită,*
(ii) $\operatorname{Ass}_A(E) \subseteq \operatorname{Max} A$,
(iii) $\operatorname{Supp}_A(E) \subseteq \operatorname{Max} A$.

DEMONSTRAŢIE. Conform propoziţiei 3.47, există o filtrare

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{7}$$

ai cărei factori E_{i-1}/E_i sunt izomorfe cu imagini omomorfe integre A/P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale inelului A, iar

$$\operatorname{Ass}_A(E) \subseteq \{ P_1, P_2, \ldots, , P_n \} \subseteq \operatorname{Supp}_A(E) \ . \tag{8}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Factorii E_{i-1}/E_i $(1 \leq i \leq n)$ sunt module de lungime finită, deci $l_A(A/P_i) < \infty$. Prin urmare A/P_i este inel artinian. Fiind domeniu de integritate, el este corp, deci $P_i \in \operatorname{Max} A$ $(1 \leq i \leq n)$. Din relaţia (8) rezultă că toate primele asociate lui E sunt ideale maximale.

Condiţia (ii) implică (iii) pentru că $\operatorname{Ass} E \subseteq \operatorname{Supp} E$ şi cele două mulţimi au aceleaşi elemente minimale. Presupunând îndeplinită condiţia (iii), din relaţia (8) rezultă că factorii filtrării (7) sunt A-module simple, deci (7) este un şir de compoziţie pentru E. Condiţia (i) este îndeplinită conform teoremei Jordan-Hölder. □

Putem acum caracteriza inelele artiniene comutative:

TEOREMA 4.5. *Pentru un inel A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *A este inel artinian,*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(*ii*) *A este inel noetherian şi orice ideal prim al lui A este maximal,*
(*iii*) *A este inel noetherian şi orice ideal prim asociat lui A este maximal.*

Dacă aceste condiţii sunt satisfăcute, atunci A este un inel semilocal, cu radicalul Jacobson nilpotent.

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Singura proprietate a cărei existenţă nu a fost încă dovedită este noetherianitatea. Vom arăta faptul echivalent că un inel artinian are lungimea finită.

Fie $I \leq A$ un ideal minimal cu proprietatea că $l_A(A/I) < \infty$. Dacă I este nenul, atunci suportul A-modulului I este nevid. Într-adevăr, $\operatorname{Supp}(I) = \cup\{\operatorname{V}(\operatorname{Ann}(a_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$, unde $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de generatori ai lui I. Idealul fiind nenul, înseamnă că mulţimea Λ este nevidă. Pentru $P \in \operatorname{Supp}(I)$ avem $I_P \neq 0$. Arătăm că I_P/PI_P este un spaţiu vectorial nenul peste corpul rezidual $A_P/PA_P \simeq A/P$ (aici se foloseşte maximalitatea idealului P). Presupunând contrariul, se găseşte $I_P = PI_P = P^2I_P = \ldots = 0$, pentru că PA_P este ideal nilpotent în inelul A_P conform lemei 4.3. Contradicţia obţinută provine din presupunerea că $I_P/PI_P = 0$. Cum orice spaţiu vectorial nenul este sursa unui morfism a cărui imagine este corpul peste care se lucrează, rezultă existenţa unui morfism surjectiv de A-module $I_P/PI_P \longrightarrow A/P$. Prin compunere cu morfismul canonic $I \longrightarrow I_P \longrightarrow I_P/PI_P$ se obţine un morfism surjectiv de A-module $v : I \longrightarrow A/P$. Nucleul $J := \ker v$ este un ideal al inelului A conţinut strict în I şi care are proprietatea că $A/J \simeq A/P$ este A-modul de lungime finită, ceea ce contrazice alegerea lui I.

Clar (iii) este consecinţă a condiţiei (ii), iar implicaţia $(iii) \Longrightarrow (i)$ decurge din propoziţia 4.4. □

Se poate arăta că orice inel necomutativ artinian la stânga este noetherian la sânga.

LEMA 4.6. *Fie A un inel artinian cu* $\operatorname{Max} A = \{M_1, \ldots, M_n\}$, $J = M_1 \cap \ldots \cap M_n$ *şi* $J^k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. *Atunci* $0 = M_1^k \cap \ldots \cap M_n^k$ *este unica descompunere primară redusă a idealului nul din A.*

DEMONSTRAŢIE. Evident $\prod_{i=1}^k M_i^k \subseteq J^k = 0$. Deoarece M_i şi M_j sunt comaximale pentru $1 \leq i < j \leq n$, rezultă că şi $M_i^k + M_j^k = A$. Conform lemei chineze a resturilor avem $0 = M_1^k \cap \ldots \cap M_n^k$, relaţie ce este o descompunere primară a idealului nul pentru că $\operatorname{Rad}(M^k) = M$ pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$ şi un modul este primar dacă radicalul său este ideal maximal. Observăm că această descompunere primară este

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

redusă întrucât o relaţie $M_i^k \supseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k$ implică

$$\prod_{j \neq i} M_j^k \subseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k = 0 \subseteq M_i \, ,$$

deci $M_j \subseteq M_i$ pentru un indice $j \neq i$. Unicitatea rezultă din teorema 3.59 şi din faptul că $M_1, \ldots, M_n$ este ideal prim minimal în A conform teoremei 4.5. □

TEOREMA 4.7. *Orice inel artinian este izomorf cu produsul direct al localizatelor sale în idealele maximale.*

DEMONSTRAŢIE. Fie J radicalul Jacobson al inelului artinian A şi $M_1, \ldots, M_n$ idealele maximale, iar $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^k = 0$. Conform rezultatului precedent şi lemei chineze a resturilor, există un izomorfism canonic $A \simeq \prod_{i=1}^n A/M_i^k$. Vom arăta că pentru $M \in \operatorname{Max} A$, morfismul de localizare $u : A \longrightarrow A_M$ este surjectiv şi are nucleul M^k.

Fie $p : A \longrightarrow A/M^k$ surjecţia canonică. Deoarece A/M^k este inel local de ideal maximal M/M^k, se obţine că $p(a)$ este inversabil pentru orice $a \in A \setminus M$. Din proprietatea de universalitate a inelelor de fracţii rezultă că există un morfism de inele $f : A_M \longrightarrow A/M^k$ astfel încât $p = fu$. Evident f este surjectiv. Rămâne să arătăm injectivitatea lui f. Dacă $a/s \in \ker f$, atunci $u(a) = a/1 \in \ker f$, încât $p(a) = f(u(a)) = 0$. Prin urmare $a \in M^k$ şi

$$a/s \in M^k A_M = \bigcap_{i=1}^n M_i A_M = \Big(\bigcap_{i=1}^n M_i^k\Big) A_M = 0 \, .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CAPITOLUL 2

Dimensiunea Krull a inelelor noetheriene

Geometrii au avut de multă vreme posibilitatea de a măsura „mărimea“ varietăţilor algebrice atribuindu-le un număr natural—„dimensiunea“. Noţiunea a fost degajată intuitiv din proprietăţi ale inelelor de polinoame şi ale imaginilor omomorfe ale acestora. Definiţia dimensiunii dată în 1928 de Krull este mult mai abstractă, de natură combinatorică şi a marcat un pas esenţial în aducerea algebrei la forma sa actuală.

1. Extinderi întregi de inele

Noţiunile şi rezultatele din această secţiune sunt generalizări ale unora obţinute anterior în teoria numerelor. Ele servesc ca pregătire pentru studiul dimensiunii, dar au de asemenea importanţă în alte capitole ale algebrei comutative.

Fie B o A-algebră şi I un ideal în A (cazul $I = A$ va fi frecvent întâlnit în noţiunile şi rezultatele următoare).

DEFINIŢIE 1.1. Un element $x \in B$ este numit *întreg peste* I dacă există un polinom $f \in A[X]$ de forma $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, cu $n > 0$, $a_i \in I$, $(0 \le i < n)$ astfel încât $f(x) = 0$. Dacă orice element al lui B este întreg peste A, se spune că B este o *A-algebră întreagă*.

PROPOZIŢIE 1.2. *Fie B o A-algebră, I un ideal în A şi $x \in B$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *x este întreg peste I,*

(*ii*) *A-subalgebra $A[x]$ a lui B este finit generată şi x aparţine idealului* $\mathrm{Rad}_{A[x]}(IA[x])$,

(*iii*) *există o A-subalgebră C a lui B cu $x \in C$, C un A-modul finit generat şi $x \in \mathrm{Rad}_C(IC)$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a arăta că (i) implică (ii), se consideră un polinom $f \in A[X]$ ca în definiţia 1.1. Cum f este unitar, orice polinom $g \in A[X]$ poate fi împărţit la f: $g = fq + r$, cu q, $r \in A[X]$ şi gradul lui r strict mai mic decât gradul lui f. Deoarece $g(x) = r(x)$, rezultă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

că $1, x, \ldots, x^{n-1}$ este un sistem de generatori pentru A-modulul $A[X]$. Din $f(x) = 0$ se obţine $x^n \in IA[x]$, astfel că $x \in \mathrm{Rad}_{A[x]}(IA[x])$.

Dacă (*ii*) este îndeplinită, atunci condiţia (*iii*) este satisfăcută de algebra $C = A[x]$. Să presupunem că afirmaţia (*iii*) este îndeplinită. Dacă $c_1, \ldots, c_s$ este un sistem de generatori pentru A-modulul C, relaţia $x \in IC$ implică $x^m c_i = a_{i1}c_1 + \cdots + a_{is}c_s$ pentru orice $i = 1, \ldots, s$, unde $a_{ik} \in A$ pentru $k = 1, \ldots, s$. Aceste relaţii sunt echivalente cu sistemul

$$\sum_{k=1}^{s}(\delta_{ik}x^m - a_{ik})c_k = 0\ ,\ i = 1, 2, \ldots, s\ ,$$

unde δ_{ik} este simbolul lui Kronecker.

Notăm cu $N = (b_{ik})$ adjuncta matricei $M := (\delta_{ik}x^m - a_{ik})$ cu elemente din inelul $A[x]$. Prin schimbarea ordinii de sumare se găseşte că pentru $k = 1, \ldots, s$ avem

$$S := \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s} b_{ki}(\delta_{ij}x^m - a_{ij})\Big)c_j = \sum_{i=1}^{s} b_{ki}\Big(\sum_{j=1}^{s}(\delta_{ij}x^m - a_{ij})c_j\Big) = 0\ .$$

Cum $NM = dU$, unde d este determinantul matricei M şi U este matricea unitate de ordin s, rezultă că suma S coincide cu

$$\sum_{j=1}^{s} \delta_{kj} d c_j = d c_k\ .$$

Pe de altă parte, există elemente $u_k \in A$ astfel ca $1 = \sum_{k=1}^{s} c_k u_k$, încât $d = d\sum_{k=1}^{s} c_k u_k = 0$. Prin dezvoltarea determinantului după prima sa linie se găseşte o relaţie de dependenţă întreagă a lui x peste I. □

COROLAR 1.3. *Dacă B este o A-algebră finită, atunci B este întreagă peste A. În acest caz, $x \in B$ este întreg peste un ideal $I \leq A$ dacă şi numai dacă $x \in \mathrm{Rad}_B(IB)$.*

Există o reciprocă parţială pentru acest rezultat:

COROLAR 1.4. *O algebră întreagă şi de tip finit este algebră finită.*

Mai general, din propoziţia 1.2 rezultă:

COROLAR 1.5. *Dacă $x_1, \ldots, x_n \in B$ sunt întregi peste $I \leq A$, atunci $A[x_1, \ldots, x_n]$ este un A-modul finit generat şi x_i aparţine idealului $\mathrm{Rad}(IA[x_1, \ldots, x_n])$, $i = 1, \ldots, n$.*

O altă consecinţă a caracterizării elementelor întregi dată în propoziţia 1.2 este tranzitivitatea extinderilor întregi:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 1.6. *Dacă B este o A-algebră întreagă şi C este o B-algebră întreagă, atunci C este o A-algebră întreagă.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru un element x arbitrar al lui C se consideră o relaţie de dependenţă întreagă peste B: $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 = 0$, $b_i \in B$. Din corolarul precedent rezultă că $A[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]$ este o A-algebră finită. Din acelaşi motiv $A[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x]$ este un A-modul finit generat. Acum se aplică rezultatul consemnat în corolarul 1.3. □

COROLAR 1.7. *Mulţimea A'_B formată din toate elementele lui B întregi peste A este A-subalgebră a lui B. Pentru orice ideal $I \leq A$,* $\mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ *coincide cu mulţimea elementelor din B întregi peste I.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $x, y \in A'_B$, A-modulul $A[x, y]$ este finit generat. Conform condiţiei (*iii*) din propoziţia 1.2, $x + y$ şi xy sunt întregi peste A. Am demonstrat, aşadar, că mulţimea A'_B este închisă la sumă şi produs. Dacă $x \in B$ este întreg peste I, atunci x aparţine idealului $\mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ conform propoziţiei 1.2.

Reciproc, pentru $x \in \mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ avem $x^m \in IA[x_1, \ldots, x_n]$ pentru anumiţi $x_1, \ldots, x_n \in A'_B$ şi $m \in \mathbb{N}$. Se foloseşte acum faptul că din condiţia (*iii*) din propoziţia 1.2 rezultă condiţia (*i*). □

DEFINIŢIE 1.8. Fie A un inel şi B o A-algebră. Inelul A'_B constând din toate elementele lui B întregi peste A se numeşte *închiderea întreagă a lui A în B*. Se spune că *A este întreg închis în B* dacă A'_B coincide cu imaginea lui A în B prin morfismul structural. Un domeniu întreg închis în corpul său de fracţii este numit *domeniu normal.*

În algebra comutativă funcţionează cu mult succes tehnica definirii unor proprietăţi ale morfismelor calchiind proprietăţi ale modulelor. Una din primele manifestări ale acestei paradigme permite definirea morfismelor întregi şi întreg închise.

DEFINIŢIE 1.9. Fie B o A-algebră de morfism structural u. Se spune că morfismul u este *întreg* dacă orice element din B este întreg peste A. Morfismul u este numit *întreg închis* dacă închiderea întreagă a lui A în B coincide cu imaginea lui u.

COROLAR 1.10. *Prin adjuncţionarea unei mulţimi arbitrare de elemente întregi peste A se obţine o A-algebră întreagă.*

DEMONSTRAŢIE. Fie X mulţimea de elemente întregi ce se adjuncţionează. Dacă X este finită, concluzia dorită a fost stabilită în corolarul 1.5. Dacă mulţimea X este infinită, se constată uşor că are loc

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

egalitatea

$$A[X] = \bigcup \{ A[F] \ : \ F \text{ parte finită a lui } X \} \ .$$

Aşadar, pentru $x \in A[X]$ există un număr natural n şi $x_1, \ldots, x_n \in X$ astfel încât $x \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Conform cazului adjuncţionării unei mulţimi finite, x este întreg peste A. Cum x a fost element arbitrar în A-algebra $A[X]$, conchidem că $A[X]$ este A-algebră întreagă. □

De aici rezultă imediat idempotenţa luării închiderii întregi:

COROLAR 1.11. *Pentru orice A-algebră B, A'_B este întreg închis în B. Echivalent, $(A'_B)'_B = A'_B$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x \in B$ este întreg peste A'_B, atunci $A'_B[x]$ este A'_B-algebră întreagă. Cum A'_B este A-algebră întreagă, din tranzitivitatea extinderilor întregi rezultă x întreg peste A. Prin urmare $x \in A'_B$. Am stabilit, aşadar, $(A'_B)'_B \subseteq A'_B$. Incluziunea opusă este trivială. □

EXEMPLE. 1. Un domeniu de integritate cu proprietatea că oricare două elemente admit un cel mai mare divizor comun este normal. În particular, inelele factoriale sunt normale.

Fie K corpul de fracţii al unui domeniu A cu proprietatea indicată. Pentru $x \in K$ se consideră o reprezentare $x = b/c$ cu b, $c \in A$ coprime şi $c \neq 0$. Dacă x satisface o relaţie de forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, cu $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, după înmulţire cu c^n se obţine relaţia $b^n + a_{n-1}cb^{n-1} + \cdots + a_1 c^{n-1} b + a_0 c^n = 0$ care arată că c divide b^n. Atunci c divide c.m.m.d.c (c, b^n), care este un element inversabil din A. Conchidem că c este inversabil în A, încât $x \in A$.

2. Se demonstrează uşor direct că un element x din $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ este întreg peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Altfel spus, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ este domeniu normal.

3. Fie $K \subseteq L$ o extindere de corpuri şi $x \in L$. Atunci x este întreg peste K dacă şi numai dacă este algebric peste K (adică este rădăcina unui polinom, nu neapărat unitar, cu coeficienţi din K).

Putem demonstra acum un rezultat faimos, care stă la baza legăturii dintre algebra comutativă şi geometria algebrică.

TEOREMA 1.12. *(Teorema zerourilor a lui Hilbert (Nullstellensatz), forma slabă) Fie K un corp algebric închis. Atunci orice ideal maximal al inelului de polinoame $K[X_1, \ldots, X_n]$ are forma $(X - a_1, \ldots, X - a_n)$, cu $a_1, \ldots, a_n \in K$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $a_1, \ldots, a_n$ elemente arbitrare din K, idealul $M := (X - a_1, \ldots, X - a_n)$ este maximal întrucât morfismul de

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

K-algebre $A := K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K$, $X_i \mapsto a_i$, $i = 1, \dots, n$, este surjectiv, de nucleu M. Reciproc, fie $M \in \operatorname{Max} A$. Din teorema 1.13 rezultă că extinderea $K \subseteq A/M$ este algebrică. Cum K este algebric închis, avem $K \simeq A/M$. Se consideră $a_i \in K$ corespunzând clasei lui X_i modulo M, pentru $i = 1, \dots, n$. Din $X_i - a_i \in M$ şi maximalitatea idealului $(X - a_1, \dots, X - a_n)$ tragem concluzia că $M = (X - a_1, \dots, X - a_n)$. □

TEOREMA 1.13. *Dacă L/K este o extindere de corpuri şi L este o K-algebră de tip finit, atunci L/K este algebrică.*

DEMONSTRAŢIE. Vom raţiona prin inducţie după numărul generatorilor $x_1, \dots, x_n$ ai K-algebrei L. Pentru $n = 1$ este clar că $L = K[x_1]$ este algebrică, în caz contrar L ar fi un inel de polinoame, în care nedeterminata nu este inversabilă. Presupunem că $n \geq 2$ şi că proprietatea este adevărată pentru $n-1$ elemente, dar este falsă pentru n elemente. După o eventuală renumerotare, găsim că x_1 este transcendent peste K. Cum $L = K(x_1)[x_2, \dots, x_n]$, din ipoteza de inducţie rezultă că L este algebric peste $K(x_1)$. Pentru $i = 2, \dots, n$ notăm $u_i \in K[x_1]$ coeficientul dominant al unui polinom cu coeficienţii din $K[x_1]$ care are ca rădăcină x_i. Fie $u := u_2 \cdots u_n$. Observăm că L este $K[x_1, \frac{1}{u}]$-algebră întreagă. Fie p un polinom ireductibil din $K[x_1]$ care nu divide u. Cum $1/p$ satisface o relaţie de forma

$$\left(\frac{1}{p}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{m-1} + \cdots + a_0 = 0 \ , \ a_i \in K[x_1, \tfrac{1}{p}], m \geq 1 \ ,$$

după înmulţirea cu p^m şi cu o putere convenabilă a lui u se ajunge la $b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + u^s = 0$, cu $b_i \in K[x_1]$. Din unicitatea descompunerii în factori primi în inelul de polinoame se trage concluzia că p divide u^s în $K[x_1]$, contradicţie. □

Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism de inele şi S un sistem multiplicativ închis din A. Se arată uşor că $S^{-1}A$-modulul $S^{-1}B$ are o structură de inel dacă se defineşte operaţia de înmulţire internă în mod natural

$$\frac{b}{s} \cdot \frac{b'}{s'} = \frac{bb'}{ss'} \quad , \quad b, b' \in B \text{ şi } \ s, s' \in S \ .$$

În plus, $S^{-1}B$ este izomorf cu inelul de fracţii $T^{-1}B$ al lui B în raport cu sistemul multiplicativ $T := u(S)$ al lui B. De asemenea, $S^{-1}B$ este o $S^{-1}A$-algebră via morfismul canonic $S^{-1}u$.

Rezultatul următor stabileşte comutarea luării fracţiilor cu luarea închiderii întregi.

PROPOZIŢIE 1.14. *În notaţiile precedente avem*

$$(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B) \ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

În particular, dacă u este un morfism întreg (resp. întreg închis), atunci $S^{-1}u : S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$ este morfism întreg (resp. întreg închis).

DEMONSTRAŢIE. Fie $x/s \in S^{-1}(A'_B)$, cu $x \in A'_B$ şi $s \in S$. Atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$. Prin înmulţirea acestei relaţii cu $1/s^n$ în $S^{-1}A$-algebra $S^{-1}B$, se obţine o relaţie de dependenţă întreagă a lui x/s peste $S^{-1}A$.

Reciproc, se consideră $x/s \in (S^{-1}A)'_{S^{-1}B}$ şi o relaţie de dependenţă întreagă a sa peste $S^{-1}A$

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{t} \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{t} = 0 \quad , \quad a_i \in A \ , \ t \in S \ , \ n \in \mathbb{N}^* \ .$$

Aceasta înseamnă că există $q \in S$ astfel încât $q(tx^n + sa_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0s^n) = 0$, relaţie ce arată că $tqx \in A'_B$. Prin urmare

$$\frac{x}{s} = \frac{tqx}{tqs} \in S^{-1}(A'_B) \ .$$

Dacă u este morfism întreg, atunci $A'_B = B$, deci $(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B) = S^{-1}B$, ceea ce înseamnă că morfismul $S^{-1}u$ este întreg. În cazul în care u este morfism întreg închis avem $A'_B = A$, astfel că $(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B) = S^{-1}A$. □

COROLAR 1.15. *Fie S un sistem multiplicativ închis al unui domeniu normal. Dacă S nu conţine 0, atunci $S^{-1}A$ este domeniu normal.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $0 \notin S$, avem $A \subseteq S^{-1}A \subseteq S^{-1}K = K$. Din propoziţia 1.14 rezultă că $S^{-1}A$ este întreg închis în corpul său de fracţii K. □

LEMA 1.16. *Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele, J un ideal în B şi $I := J \cap A$. Atunci:*

a) $A/I \subseteq B/J$ este o extindere întreagă.

b) Dacă J conţine un nondivizor al lui zero pe B, atunci $I \neq 0$.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Injectivitatea este asigurată de ipoteza $I = J \cap A$. Restul rezultă din propoziţia 1.14.

b) Dacă $x \in J$ este un nondivizor al lui zero pe B şi satisface relaţia de dependenţă întreagă de grad minim $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, cu $n > 0$ şi $a_i \in A$, atunci $a_0 \neq 0$, pentru că în caz contrar, după împărţirea cu $x \notin Z(B)$, obţinem o ecuaţie de grad mai mic satisfăcută de x. Cum $a_0 \in J \cap A = I$, idealul I este nenul. □

LEMA 1.17. *Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de domenii de integritate. Atunci A este corp dacă şi numai dacă B este corp.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că A este corp. Pentru $y \in B$ nenul se consideră relaţia de dependenţă întreagă de grad minim $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. Termenul liber a_0 este nenul, astfel că avem $y[-a_0^{-1}(y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a_1)] = 1$.

Reciproc, dacă B este corp, orice element nenul $x \in A$ are un invers $x^{-1} \in B$. Dintr-o relaţie de dependenţă întreagă pentru x^{-1} de forma $x^{-n} + a_{n-1}x^{-n+1} + \cdots + a_0 = 0$, unde $a_i \in A$, rezultă $x^{-1} = -a_{n-1} - \cdots - a_0x^{n-1} \in A$. □

În studiul morfismelor întregi sau întreg închise de inele, un rol important joacă următoarele noţiuni.

DEFINIŢIE 1.18. Pentru o extindere de inele $A \subseteq B$ se consideră condiţiile:

LO: Pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ există $Q \in \operatorname{Spec} B$ cu $Q \cap A = P$.

Se spune că P este *urma lui* Q sau Q *stă peste* P.

GU: Pentru orice $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} A$ şi $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ cu $P_1 \subseteq P_2$ şi $P_1 = Q_1 \cap A$ există $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ astfel încât $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P_2 = Q_2 \cap A$.

GD: Pentru orice $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} A$ şi $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ cu $P_1 \subseteq P_2$ şi $P_2 = Q_2 \cap A$ există $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ astfel încât $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P_1 = Q_1 \cap A$.

INC: Orice două ideale prime distincte Q_1, Q_2 ale lui B ce au aceeaşi urmă pe A sunt incomparabile faţă de incluziune.

Tehnica transferării proprietăţilor de la inel la morfisme permite definirea analoagă a condiţiilor LO, GU, GD şi INC relativ la un morfism $u : A \longrightarrow B$: referirile la intersecţia $Q \cap A$ se înlocuiesc cu preimaginea $u^{-1}(Q)$.

Dacă $u^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ este aplicaţia continuă între spectre indusă de morfismul de algebre u, condiţia LO este echivalentă cu surjectivitatea lui u^*.

DEFINIŢIE 1.19. Fie A un inel nenul. Se spune că un lanţ de ideale prime ale inelului A

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n \tag{9}$$

are *lungimea n*. Un lanţ (9) se numeşte *saturat* dacă pentru orice $i = 1, \ldots, n$ şi $Q \in \operatorname{Spec} A$, din $P_{i-1} \supseteq Q \supseteq P_i$ rezultă $Q = P_i$ sau $Q = P_{i-1}$.

Înălţimea, resp *coînălţimea*, unui ideal prim P este definită a fi marginea superioară a lungimilor tuturor lanţurilor (9) cu $P_0 = P$, resp. $P_n = P$. Ea se notează ht P, resp. coht P. *Înălţimea* unui ideal arbitrar $I \leq A$ se defineşte a fi infimumul înălţimilor idealelor prime asociate lui. *Coînălţimea* sau *dimensiunea* idealului I se defineşte prin

$$\operatorname{coht} I = \dim A/I\ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Marginea superioară a lungimilor tuturor lanţurilor saturate de ideale prime ale lui A se numeşte *dimensiunea Krull* a inelului A şi se notează $\dim A$. Se defineşte dimensiunea inelului nul ca fiind -1.

Evident, $\dim A=0$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Spec} A= \operatorname{Max} A \neq \emptyset$. Este limpede că $\dim \mathbb{Z} = 1$.

Ţinând cont de corespondenţa dintre idealele prime ale unui inel şi idealele prime ale unui localizat sau ale unei imagini omomorfe, se obţine

$$\operatorname{ht} P = \dim A_P \quad , \quad \operatorname{coht} P = \dim A/P$$

Evident, dacă $P \in \operatorname{Spec} A$, atunci $\operatorname{ht} P = 0$ dacă şi numai dacă $P \in \operatorname{Min} A$.

EXEMPLE. 1. Pentru orice număr prim p, morfismul canonic de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}_p$ este întreg, fiind finit, dar nu satisface condiţia LO. Explicaţia este simplă: corpul $\mathbb{Z}_p$ are un singur ideal prim, a cărui preimagine în $\mathbb{Z}$ este $p\mathbb{Z}$. Orice alt ideal prim din $\mathbb{Z}$ nu este în imaginea morfismului spectral $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

2. Condiţia LO nu este satisfăcută de extinderea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Justificarea este aceeaşi ca şi pentru exemplul precedent, dar de această dată morfismul nu mai este întreg.

3. Orice extindere de inele $A \subseteq B$ cu $\dim A = 0$ satisface condiţiile LO, GU şi GD, dar nu satisface condiţia INC dacă $\dim B \geq 1$.

TEOREMA 1.20. *Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism injectiv şi întreg de inele. Atunci:*

a) $u^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ este aplicaţie surjectivă.

b) Imaginea prin u^* a oricărei mulţimi închise din Spec B *este mulţime închisă în* Spec A.

c) Extinderea $A \subseteq B$ satisface condiţia INC.

d) u^* induce un izomorfism între Max B *şi* Max A. *Altfel spus, un ideal prim Q al lui B este maximal dacă şi numai dacă $Q \cap A$ este ideal maximal în A.*

DEMONSTRAŢIE. $a)$ Vom arăta mai întâi $PB \cap A \subseteq P$ pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$. Fie $x \in PB$ şi $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ o relaţie de dependenţă întreagă satisfăcută de x. Cum $x \in \operatorname{Rad}_B(PB)$, înseamnă că x este întreg peste P, deci $a_i \in P$. Dacă $x^n \in PB \cap A$, rezultă $x^n \in P$ şi prin urmare $x \in P$.

Relaţia demonstrată în paragraful precedent se exprimă echivalent $PB \cap S = \emptyset$, unde $S := A \setminus P$. Conform lemei lui Krull există un ideal prim Q al lui B astfel încât $PB \subseteq Q$ şi $Q \cap S = \emptyset$. Prin urmare $P \subseteq PB \cap A \subseteq Q \cap A \subseteq P$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b) Fie $J \leq B$ şi $I := J \cap A$. Extinderea $A/I \subseteq B/J$ este întreagă conform lemei 1.16 şi satisface proprietatea LO în virtutea punctului *a*). Din corespondenţa existentă între idealele prime ale inelului A/I şi mulţimea închisă $\mathrm{V}(I)$ a lui Spec A rezultă că $u^*(\mathrm{V}(J)) = \mathrm{V}(I)$.

c) Fie $Q_1, Q_2 \in$ Spec B cu $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P = Q_1 \cap A = Q_2 \cap A$. Atunci extinderea $A/P \subseteq B/Q_1$ este întreagă, iar Q_2/Q_1 este un ideal prim al domeniului de integritate B/Q_1 a cărui urmă pe A/P este nulă. Din lema 1.16*b*) rezultă $Q_2/Q_1 = 0$, adică $Q_1 = Q_2$.

d) Afirmaţia este o parafrază a rezultatului stabilit în lema 1.17, aplicată pentru extinderea de domenii $A/P \subseteq B/Q$. O altă demonstraţie foloseşte următoarele argumente:

Fie $Q \in$ Spec B şi $P := Q \cap A$. Dacă A/P este corp, cum B/Q se obţine adjuncţionând elemente algebrice la A/P, înseamnă că B/Q este corp. Reciproc, dacă B/Q este corp, idealul nul este singurul său ideal prim. Din proprietatea LO se deduce că unicul ideal prim din A/P este idealul nul. □

COROLAR 1.21. *Orice extindere întreagă satisface condiţia GU.*

DEMONSTRAŢIE. Fie P_1, $P_2 \in$ Spec A, $Q_1 \in$ Spec B cu $P_1 \subseteq P_2$ şi $Q_1 \cap A = P_1$. Aplicăm extinderii întregi $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ proprietatea LO pentru $Q_1/P_1 \in$ Spec (A/P_1). □

TEOREMA 1.22. *(Teorema GU a lui Krull-Cohen-Seidenberg) Orice extindere întreagă de inele $A \subseteq B$ satisface condiţiile* LO, GU *şi* INC. *În plus* dim $A=$ dim B.

DEMONSTRAŢIE. Prima parte a fost deja stabilită. Ultima afirmaţie se demonstrează astfel: condiţia GU implică dim $A \leq$ dim B. Inegalitatea contrară este consecinţa proprietăţii INC: orice lanţ saturat de ideale prime din B produce un lanţ saturat de ideale prime din A. □

EXEMPLU. Dacă $u : A \longrightarrow B$ este un morfism întreg neinjectiv, atunci nu rezultă că u are proprietatea LO. De pildă, pentru morfismul canonic $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nu există nici un ideal prim în cosursă care să stea peste idealul nul din $\mathbb{Z}$.

Având în vedere relaţiile ht $Q =$ dim B_Q şi coht $Q =$ dim B/Q, deducem:

COROLAR 1.23. *Dacă $A \subseteq B$ este o extindere întreagă de inele şi $Q \in$ Spec B, atunci*

$$\mathrm{ht}\, Q \leq \mathrm{ht}\ (Q \cap A)\ ,\ \mathrm{coht}\ Q = \mathrm{coht}\ (Q \cap A)\ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 1.24. *Dacă $u : A \longrightarrow B$ este un morfism injectiv şi întreg de inele cu B inel noetherian, atunci $u^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ este aplicaţie finită (i.e. pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$, există doar un număr finit de ideale prime Q din B ce stau peste P).*

DEMONSTRAŢIE. Conform proprietăţii LO, idealul PB este conţinut într-un ideal prim Q din B ce stă peste P. Din condiţia INC rezultă că idealele prime din B ce stau peste P sunt exact cele minimale peste PB. Dar într-un inel noetherian există doar un număr finit de ideale prime minimale. □

În continuare punem în evidenţă condiţii suficiente ca o extindere întreagă să aibă proprietatea GD. Pentru demonstraţie sunt necesare câteva pregătiri.

DEFINIŢIE 1.25. Fie A un domeniu de integritate cu corp de fracţii K, L o K-algebră şi $x \in L$ un element întreg peste K (echivalent, x este *algebric* peste K, adică rădăcina unui polinom nenul din $K[X]$, nu neapărat unitar). Mulţimea

$$I(x) := \{\, g \in K[X] \;:\; g(x) = 0 \,\}$$

este nevidă. Se verifică uşor că $I(x)$ este un ideal nenul din inelul principal $K[X]$. Generatorul unitar al lui $I(x)$ se numeşte *polinomul minimal* al lui x peste K.

Dacă L este domeniu de integritate, idealul $I(x)$ este prim, pentru că din $f = gh$, unde $g, h \in K[X]$ cu $0 < \operatorname{grad} g < \operatorname{grad} f$ şi $g(x)h(x) = 0$ rezultă $g \in I(x)$ sau $h \in I(x)$. În consecinţă, polinomul minimal al lui x este ireductibil în acest caz. În general, însă, un polinom minimal nu este neapărat ireductibil.

LEMA 1.26. *Fie A un domeniu normal de corp de fracţii K, I un ideal radical în A şi L un corp ce conţine K. Dacă $x \in L$ este întreg peste I, polinomul său minimal f peste K are forma $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ cu $a_i \in I$, $i = 0, \ldots, n-1$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui f într-o închidere algebrică $\overline{K}$ a lui K. Polinomul f fiind ireductibil, grupul său Galois acţionează tranzitiv pe mulţimea rădăcinilor lui f. Altfel spus, există un K-automorfism al lui $\overline{K}$ care duce x în oricare alt element x_i, $i = 2, \ldots, n$. Rezultă că toate rădăcinile x_i sunt întregi peste I. Coeficienţii a_i sunt funcţii simetrice elementare de rădăcini, deci aparţin idealului $\operatorname{Rad}_{A'_K}(IA'_K)$. Ipoteza A domeniu normal înseamnă $A'_K = A$, prin urmare $\operatorname{Rad}_{A'_K}(IA'_K) = \operatorname{Rad}_A(I) = I$, întrucât I este presupus a fi ideal radical în A. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

TEOREMA 1.27. *(Teorema GD a lui Krull-Cohen-Seidenberg) Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele. Presupunem că A este un domeniu normal şi că orice element nenul al lui A este nondivizor al lui zero în B. Atunci extinderea satisface condiţia* GD.

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra cazul particular B domeniu. O demonstraţie completă se găseşte de pildă în [**1**].

Fie $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} A$, $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ cu $P_1 \subseteq P_2$ şi $Q_2 \cap A = P_2$. Considerăm sistemele multiplicative $S_1 := A \setminus P_1$, $T_2 := B \setminus Q_2$ şi $S := \{ st \, : \, s \in S_1, t \in T_2 \}$. Vom arăta $P_1 B \cap S = \emptyset$. Din lema lui Krull va rezulta existenţa unui ideal prim Q_1 din B care conţine $P_1 B$ şi astfel încât $Q_1 \cap S = \emptyset$. Cum $T_2 \subseteq S$, vom avea $Q_1 \cap T_2 = \emptyset$, deci $Q_1 \subseteq Q_2$, iar din $S_1 \subseteq S$ va decurge $Q_1 \cap S_1 = \emptyset$ şi $Q_1 \cap A \subseteq P_1$. Dar $P_1 B \subseteq Q_1$ implică $P_1 \subseteq Q_1 \cap A$, iar $P_1 \neq P_2$ implică $Q_1 \neq Q_2$.

Să presupunem că există $x \in P_1 B \cap S$. Atunci x este întreg peste P_1 şi conform lemei precedente, polinomul său minimal peste corpul de fracţii K al lui A are forma $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, cu $a_i \in P_1$, $i = 0, \ldots, n-1$. Cum $x \in S$, există $s \in S_1$ şi $t \in T_2$ astfel ca $x = st$. Polinomul minimal al lui $t = x/s$ peste K este

$$X^n + \tfrac{a_{n-1}}{s} X^{n-1} + \cdots + \tfrac{a_0}{s^n} \ ,$$

ai cărui coeficienţi sunt din A întrucât t este întreg peste A. Aşadar, elementele $b_i := a_i / s^{n-i}$, $i = 0, \ldots, n-1$, sunt din A şi satisfac relaţiile $b_i s^{n-i} \in P_1$. Cum s nu aparţine lui P_1, rezultă $b_i \in P_1$ pentru orice i, $0 \leq i < n$, ceea ce înseamnă că t este întreg peste P_1. Atunci avem $t \in \operatorname{Rad}_B(P_1 B) \subseteq Q_2$. S-a contrazis alegerea $t \in S_2 = B \setminus Q_2$. □

COROLAR 1.28. *În ipotezele teoremei GD, avem* $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} (Q \cap A)$ *pentru orice ideal prim Q al lui B.*

DEMONSTRAŢIE. Ştim deja că urma are înălţimea cel puţin egală cu înălţimea lui Q. Din teoremă rezultă că din orice lanţ saturat de ideale prime din A ce se termină cu $Q \cap A$ putem construi un lanţ de ideale prime din B ce se termină cu Q şi de aceeaşi lungime. □

O frumoasă generalizare a teoremei GD a lui Krull-Cohen-Seidenberg a fost obţinută de T. Dumitrescu [**9**].

TEOREMA 1.29. *(Dumitrescu) Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele cu proprietatea că pentru orice $x \in B$, idealul $I(x)$ al lui $A[X]$ este principal. Atunci extinderea satisface condiţia* GD.

EXERCIŢII.

1. Pentru o A-algebră B, I ideal în A şi $x \in B$, următoarele condiţii sunt echivalente:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(*i*) x este întreg peste I,

(*ii*) există un $A[x]$-modul fidel (*i.e.* $\mathrm{Ann}_{A[x]}E = 0$) care este A-modul finit generat şi pentru care $xE \subseteq IE$.

2. Inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este domeniu normal, dar nu orice două elemente ale sale admit un cel mai mare divizor comun.

3. Fie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o familie de subinele normale ale unui domeniu de integritate. Arătaţi că $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ este domeniu normal.

4. Următoarele condiţii sunt echivalente pentru un domeniu de integritate A:

(*i*) A este domeniu normal,

(*ii*) A_P este domeniu normal pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, A$,

(*iii*) A_M este domeniu normal pentru orice $M \in \mathrm{Max}\, A$.

5. Dacă extinderea $A \subseteq B$ satisface condiţia GU, atunci ea satisface şi condiţia LO.

6. Dacă extinderea $A \subseteq B$ satisface condiţiile GU şi INC, atunci dim $A=$ dim B.

7. Fie K un corp şi polinomul $f \in K[X_1, \ldots, K_n]$ ale cărui componente omogene sunt f_0, ..., f_m cu f_i polinom nul sau omogen de grad i, $i = 0$, ..., m. Presupunem că $f_m \neq 0$ este produs de polinoame ireductibile distincte. Arătaţi că inelul $K[f]$ este întreg închis în $K[X_1, \ldots, K_n]$ şi corpul $K(f)$ este algebric închis în $K(X_1, \ldots, K_n)$.

8. Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele. Dacă B este inel local (resp. semilocal), atunci A este inel local (resp. semilocal).

9. Să se arate că orice inel redus este întreg închis în inelul de polinoame într-o nedeterminată peste el.

10. Fie $A = \mathbb{Z}'_{\mathbb{C}}$. Să se arate că:

a) extinderea $\mathbb{Z} \subseteq A$ este întreagă, dar nu este finită;

b) $P = P^2$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, A$;

c) singurul ideal prim din A finit generat este idealul nul;

d) A nu este inel noetherian;

e) A nu are elemente prime.

11. Pentru orice A-algebră B, închiderea întreagă a inelului de polinoame $A[X_1, \ldots, X_n]$ în $B[X_1, \ldots, X_n]$ este $A'_B[X_1, \ldots, X_n]$.

12. Fie d un întreg liber de pătrate, $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ şi $A := \mathbb{Z}'_K$. Să se demonstreze:

a) Dacă $d \equiv 2 \pmod 4$ sau $d \equiv 3 \pmod 4$, atunci $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

b) Dacă $d \equiv 1 \pmod 4$, atunci $A = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{d})/2]$.

13. Pentru $d \neq 1$ un întreg liber de pătrate şi $d \equiv 1 \pmod 4$, domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nu este normal.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

14. Fie K un corp. Orice K-algebră A conţinută în inelul de polinoame într-o variabilă $K[X]$ este finit generată şi are dimensiunea cel mult unu.

15. Pentru orice inel A, extinderea $A \subset A[X]$ satisface condiţiile LO şi GD, dar nu şi condiţia INC. Pentru dim $A \geq 1$, nu este satisfăcută nici condiţia GU.

16. Un morfism de inele $u : A \longrightarrow B$ îndeplineşte condiţia GD dacă şi numai dacă pentru orice ideal $P \in \operatorname{Spec} A$ şi orice $Q \in \operatorname{Min}(B/PB)$ avem $u^{-1}(Q) = P$.

17. Fie A un domeniu de integritate, a şi c elemente ale sale şi $B := A[X]/(X^2 + aX + c)$. Să se arate că pentru orice $b \in B$, idealul $I(b)$ al lui $A[X]$ format din toate polinoamele care se anulează în b este principal.

18. Pentru $A \subseteq B$ o extindere de inele, idealul

$$f_{B/A} := \{\, a \in A \,:\, aB \subseteq A \,\}$$

este numit *conductorul lui B în A*.

a) Arătaţi că $f_{B/A}$ este cel mai mare ideal din B conţinut în A.

b) Dacă B este A-algebră finită şi $S \subset A$ este un sistem multiplicativ închis, atunci

$$f_{S^{-1}B/S^{-1}A} = S^{-1}(f_{B/A}) \ .$$

19. Fie A un domeniu de integritate a cărui închidere întreagă $\bar{A}$ în corpul de fracţii K este A-algebră finită.

a) Pentru $P \in \operatorname{Spec} A$, A_P este întreg închis în K dacă şi numai dacă P nu conţine idealul $f_{\bar{A}/A}$.

b) A este domeniu normal dacă şi numai dacă A_M este întreg închis în K pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$.

2. Lema de normalizare

Multă vreme, algebra comutativă a însemnat studierea inelelor de polinoame cu coeficienţi întregi sau într-un corp. Nu doar familiaritatea cu aceste inele a favorizat această situaţie, ci şi bogăţia proprietăţilor ce aşteptau să fie puse în evidenţă. Rezultatul central al acestei secţiuni arată că un inel de tip finit peste un corp este modul finit generat peste un inel de polinoame cu coeficienţi în corpul respectiv. Un astfel de rezultat, pe lângă consecinţele ce decurg nemijlocit din el, are valoare arhetipală, după acest model fiind ulterior obţinute teoreme de structură pentru inele locale complete.

DEFINIŢIE 2.1. O algebră A de tip finit peste un corp K este numită *K-algebră afină.* Dacă în plus A este domeniu de integritate, se spune că A este *K-domeniu afin.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

LEMA 2.2. *Fie f un element din inelul de polinoame $K[X_1, \ldots, X_n]$ în care nedeterminata X_n apare efectiv. Atunci:*

a) Există numere naturale nenule r_1, …, r_{n-1} astfel încât după efectuarea substituţiei $Y_i = X_i - X_n^{r_i}$, $1 \leq i < n$, f să aibă forma $cX_n^m + g_1X_n^{m-1} + \cdots + g_m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$, $c \in K$, $c \neq 0$ şi $g_i \in K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ pentru $1 \leq i \leq m$.

b) Dacă K este infinit, aceeaşi formă pentru f poate fi obţinută cu o substituţie $Y_i = X_i - c_iX_n$, unde c_i, $1 \leq i < n$, sunt elemente convenabil alese din K.

DEMONSTRAŢIE. Fie $f = \sum a_{e_1 \ldots e_n} X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$, cu $a_{e_1 \ldots e_n} \in K$.

a) După efectuarea unei substituţii cu alura indicată, f devine

$$\sum a_{e_1 \ldots e_n} (Y_1 + X_n^{r_1})^{e_1} \cdots (Y_{n-1} + X_n^{r_{n-1}})^{e_{n-1}} X_n^{e_n} =$$

$$= \sum a_{e_1 \ldots e_n} \left(X_n^{r_1e_1 + \cdots + r_{n-1}e_{n-1} + e_n} + \text{ polinom de grad mai mic în } X_n\right) .$$

Ideea este de a alege r_i suficient de mari astfel ca exponenţii lui X_n să fie distincţi. Se poate pune $r_i = t^i$ pentru t cel mai mare dintre indicii e_1, …, e_n pentru care există coeficient $a_{e_1 \ldots e_n}$ nenul.

În cazul *b*) considerăm componentele omogene f_0, f_1, …, f_m ale lui f, cu $f_j \in K[X_1, \ldots, X_n]$ polinom nul sau omogen de grad j, $0 \leq j \leq m$, şi $f_m \neq 0$. Prin substituţia indicată se găseşte

$$f = f_m(-c_1, \ldots, -c_{n-1}, 1)X_n^m + \text{ polinom de grad mai mic în } X_n .$$

Observăm că $f_m(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1)$ este polinom nenul întrucât f_m este polinom nenul şi omogen în X_1, …, X_n. Un raţionament prin inducţie după numărul variabilelor conduce la concluzia că se pot găsi c_1, …, $c_{n-1} \in K$ astfel încât $f_m(-c_1, \ldots, -c_{n-1}, 1) \neq 0$. □

TEOREMA 2.3. *(Lema de normalizare) Fie A o algebră afină peste un corp K şi $I \subset A$ un ideal. Există numere naturale $h \leq d$ şi elemente y_1, …, $y_d \in A$ astfel încât*

a) y_1, …, y_d sunt algebric independente peste K,

b) A este $K[y_1, \ldots, y_d]$-algebră finită,

c) $I \cap K[y_1, \ldots, y_d] = (y_{h+1}, \ldots, y_d)$.

DEMONSTRAŢIE. Concluzia anunţată este obţinută în mai mulţi paşi.

Pasul 1. Cazul în care A este inel de polinoame $K[X_1, \ldots, X_n]$ şi I este ideal principal, generat de un polinom neconstant f.

În această situaţie se poate alege $d = n$, $y_n = f$ şi y_1, …, y_{n-1} ca în lema 2.2. Din relaţia

$$0 = f - y_n = cX_n^m + g_1X_n^{m-1} + \cdots + g_m - y_n$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

cu $g_i \in K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ rezultă că X_n este întreg peste algebra de polinoame $K[y_1, \dots, y_n]$. Întrucât $A = K[y_1, \dots, y_n][X_n]$, am obţinut condiţia $b)$.

Elementele y_1, ..., y_n sunt algebric independente peste K pentru că în caz contrar $K(y_1, \dots, y_n) = K(X_1, \dots, X_n)$ ar avea gradul de transcendenţă peste K strict mai mic decât n. Rămâne să stabilim proprietatea $c)$. Orice element $g \in I \cap K[y_1, \dots, y_n]$ se scrie $g = fu$, cu $u \in A$. Conform condiţiei $b)$, u verifică o relaţie de dependenţă întreagă peste $K[y_1, \dots, y_n]$:

$$u^s + b_1 u^{s-1} + \cdots + b_s = 0 \ , \quad \text{unde } s > 0 \text{ şi } b_i \in K[y_1, \dots, y_n] \ .$$

De aici se obţine imediat egalitatea $g^s + b_1 y_n g^{s-1} + \cdots + b_s y_n^s = 0$, care conduce la concluzia că y_n divide g în inelul $K[y_1, \dots, y_n]$. Am arătat, aşadar, $I \cap K[y_1, \dots, y_n] \subseteq (y_n)$. Cum incluziunea contrară este evidentă, conchidem că proprietatea $c)$ este satisfăcută de $h = n - 1$.

Pasul 2. A este inel de polinoame şi I este un ideal, nu neapărat principal.

Cazul $I = 0$ nu necesită justificare. Putem presupune că I conţine un polinom neconstant f. Vom demonstra prin inducţie după numărul de variabile n.

Pentru $n = 1$, A este inel principal şi am tranşat acest caz la pasul precedent. Fie $n > 1$ şi y_1, ..., y_n aleşi ca la Pasul 1. Invocând ipoteza de inducţie pentru $I \cap K[y_1, \dots, y_{n-1}]$, se găsesc elemente t_1, ..., $t_{d-1} \in K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ algebric independente peste K astfel încât $K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ este $K[t_1, \dots, t_{d-1}]$-modul finit generat şi $I \cap K[t_1, \dots, t_{d-1}] = (t_{h+1}, \dots, t_{d-1})$ pentru un număr natural $h \le d-1$ convenabil. Atunci $K[y_1, \dots, y_n]$ este $K[t_1, \dots, t_{d-1}, y_n]$-modul de tip finit şi deci A este $K[t_1, \dots, t_{d-1}, y_n]$-modul finit generat. De aici se deduce că $d = n$ şi că $t_1, \dots, t_{d-1}, y_n$ sunt algebric independente peste K. Dacă K este infinit, putem alege t_i $(i = 1, \dots, h)$ combinaţii liniare de y_j $(j = 1, \dots, n-1)$ cu coeficienţi din K, încât primele h dintre elementele t_i se exprimă liniar în funcţie de X_1, ..., X_n.

Orice $f \in I \cap K[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$ se poate scrie sub forma $f = g + u y_n$, unde $g \in I \cap K[t_1, \dots, t_{d-1}] = (t_{h+1}, \dots, t_{d-1})$ şi $u \in K[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$. De aici se deduce că idealul $I \cap K[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$ este generat de t_{h+1}, ..., t_{n-1}, y_n.

Pasul 3. Cazul general: $A = K[X_1, \dots, X_n]/J$, cu J ideal propriu.

Conform celor stabilite la Pasul 2, există un număr natural $d \le n$ şi o subalgebră $K[y_1, \dots, y_n]$ a lui $K[X_1, \dots, X_n]$ astfel încât $J \cap K[y_1, \dots, y_n] = (y_{d+1}, \dots, y_n)$, cu y_1, ..., y_d combinaţii liniare de X_1, ..., X_n dacă K este infinit. Întrucât y_1, ..., y_d sunt algebric independente peste K, imaginea lui $K[y_1, \dots, y_n]$ în A poate fi

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

identificată cu o algebră de polinoame $K[Y_1, \ldots, Y_d]$. În plus, A este $K[Y_1, \ldots, Y_d]$-modul finit generat. Aplicăm Pasul 2 pentru urma idealului considerat $L := I \cap K[Y_1, \ldots, Y_d]$. Se găseşte o subalgebră de polinoame $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[Y_1, \ldots, Y_d]$ astfel încât această extindere este întreagă, $L \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$, unde $0 \leq h \leq d$ şi, în ipoteza că K este corp infinit, $t_1, \ldots, t_h$ sunt combinaţii liniare de $Y_1, \ldots, Y_d$, deci şi de imaginile lui $X_1, \ldots, X_n$ în A. Concluzia dorită rezultă observând că A este $K[t_1, \ldots, t_d]$-algebră finită datorită tranzitivităţii extinderilor finite. □

DEFINIŢIE 2.4. Pentru o K-algebră afină nenulă A, subalgebra sa $K[y_1, \ldots, y_d]$ este numită *normalizare Noether* dacă $y_1, \ldots, y_d$ sunt algebric independente peste K şi A este $K[y_1, \ldots, y_d]$-modul de tip finit.

Există o versiune mai tare a lemei de normalizare, care permite tratarea unui lanţ finit de ideale dintr-o algebră afină. Enunţul şi demonstraţia se găsesc în [**19**] sau [**2**].

Lema de normalizare împreună cu teoremele Krull-Cohen-Seidenberg au aplicaţii diverse.

COROLAR 2.5. *Fie $A \subseteq B$ o extindere de tip finit de inele, cu A domeniu de integritate. Există un element nenul a din A şi o A-subalgebră C a lui B, izomorfă (ca A-algebră) cu o A-algebră de polinoame, astfel încât extinderea $C_a \subseteq B_a$ este întreagă.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $S := A \setminus \{ 0 \}$ şi $z_1, \ldots, z_r$ un sistem de generatori ai lui B ca A-algebră. Atunci $S^{-1}B$ este algebră de tip finit peste corpul de fracţii $K = S^{-1}A$ al lui A. Aplicând lema de normalizare pentru idealul nul din $S^{-1}B$, se găsesc $x_1, \ldots, x_n \in S^{-1}B$ elemente algebric independente peste K astfel încât extinderea $K[x_1, \ldots, x_n] \subseteq B$ să fie întreagă. Imaginea în $S^{-1}B$ a fiecărui generator z_j verifică o relaţie de dependenţă întreagă de forma

$$\Big(\frac{z_j}{1}\Big)^{n_j} + \sum_{k<n_j} f_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\Big(\frac{z_j}{1}\Big)^k = 0 \ , \text{ unde } f_{kj} \in K[x_1, \ldots, x_n] \ .$$

Alegem a un numitor comun pentru $x_1, \ldots, x_n$ şi toţi coeficienţii din polinoamele f_{kj}, obţinând relaţii de forma

$$a z_j^{n_j} + \sum_{k<n_j} g_{kj} z_j^k = 0 \ , \ 1 \leq j \leq r \ ,$$

unde g_{kj} sunt polinoame în $y_1 := ax_1, \ldots, y_n := ax_n$ cu coeficienţi în A. Prin urmare $az_1, \ldots, az_r$ sunt elemente întregi peste inelul $C := A[y_1, \ldots, y_n]$. Cum $y_1, \ldots, y_n$ sunt algebric independente peste A,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

rezultă că C este izomorfă cu o A-algebră de polinoame. În inelul $B_a = B[\frac{1}{a}] = A[z_1, \ldots, z_n][\frac{1}{a}]$ avem $z_j/1 = az_j/1 \cdot 1/a$, deci $z_1/1$, ..., $z_r/1$ sunt întregi peste C_a. □

COROLAR 2.6. *Fie A domeniu de integritate, K corpul său de fracţii şi L/K o extindere de corpuri. Dacă L este A-algebră de tip finit, atunci L este extindere finită a lui K şi există $a \in A$, $a \neq 0$, astfel încât $K = A_a$.*

DEMONSTRAŢIE. Din corolarul precedent decurge existenţa unor elemente x_1, ..., $x_n \in L$ şi $a \in A$, $a \neq 0$, astfel încât x_1, ..., x_n sunt algebric independente peste A, deci şi peste K, iar extinderea $A[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{a}] \subseteq L$ este întreagă. Dar singurele elemente inversabile dintr-un inel de polinoame cu coeficienţi într-un domeniu C sunt elementele inversabile din C. Folosind această observaţie pentru $C :=$ $:= A[\frac{1}{a}]$, rezultă $n = 0$ şi deci C este corp, conţinut în corpul de fracţii al lui A. Atunci $K = C = A_a$. Extinderea $K \subseteq L$ fiind întreagă şi de tip finit, ea este finită conform corolarului 1.5. □

PROPOZIŢIE 2.7. *Dacă $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$ este o normalizare Noether, atunci* dim A=d. *Dacă în plus A este domeniu de integritate, toate lanţurile maximale de ideale prime din A au lungime d.*

DEMONSTRAŢIE. Se ştie din teorema GU că $\dim K[y_1, \ldots, y_d] =$ $= \dim A$. Deoarece lanţul de ideale prime din $K[y_1, \ldots, y_d]$

$$0 \subset (y_1) \subset (y_1, y_2) \subset \ldots \subset (y_1, \ldots, y_d)$$

are lungimea d, obţinem $\dim A \geq d$. Vom arăta că pentru un lanţ arbitrar de ideale prime din A

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m \tag{10}$$

avem $m \leq d$.

Raţionăm prin inducţie după d. Notăm $P_i := Q_i \cap K[y_1, \ldots, y_d]$, $i = 0$, ..., m, şi notăm că în lanţul $P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_m$ nu sunt repetiţii (din cauza condiţiei INC, îndeplinită conform teoremei 1.20). Pentru $d = 0$ nu avem nimic de demonstrat. Presupunem că $d \geq 1$ şi că aserţiunea a fost stabilită pentru algebrele de polinoame în mai puţin de d variabile. Evident putem presupune şi că $m \geq 1$.

Din lema de normalizare decurge existenţa unei normalizări Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ cu $P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$ pentru un anumit întreg $0 \leq h \leq d$. Din teorema 1.20 şi din faptul că idealul P_1 este nenul rezultă $h < d$. De aici se deduce că $K[t_1, \ldots, t_h] \subseteq K[t_1, \ldots, t_d]/P_1$ este normalizare Noether căreia i se

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

poate aplica ipoteza de inducţie, rezultând că lungimea lanţului de ideale prime

$$0 \subset P_2/P_1 \subset \ldots \subset P_m/P_1 \tag{11}$$

satisface inegalitatea $m-1 \leq h$. Prin urmare $m-1 \leq h \leq d-1$, adică $m \leq d$.

Să presupunem în plus că lanţul de ideale prime (10) este maximal dacă A este domeniu de integritate. Vom arăta prin reducere la absurd că lanţul (11) este lanţ maximal de ideale prime din $K[y_1, \ldots, y_d]$. Presupunem că există un indice i, $0 \leq i < m$, şi un ideal prim conţinut strict în P_{i+1} şi care conţine strict P_i. Alegem o normalizare Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ astfel ca $P_i \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$ pentru un număr natural $h \leq d$. Atunci $K[t_1, \ldots, t_h] \subseteq K[t_1, \ldots, t_d]/P_i$ este normalizare Noether. Cum există un ideal prim nenul al inelului $K[t_1, \ldots, t_d]/P_i$ conţinut strict în P_{i+1}/P_i, înseamnă că în $K[t_1, \ldots, t_h]$ există un ideal prim nenul conţinut strict în $P_{i+1}/(P_i \cap K[t_1, \ldots, t_h])$. Rezultă $Q_0 = 0$ şi $Q_m \in \operatorname{Max} A$. Cum $P_0 = 0$ şi P_m este ideal maximal al lui $K[y_1, \ldots, y_d]$, din teorema 1.20 se deduce că lanţul (11) este saturat şi maximal.

Demonstrăm acum $m = d$ prin inducţie după d. Cazul iniţial $d = 0$ este clar, deci presupunem $d \geq 1$. Considerăm o normalizare Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ pentru care $P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$. Din corolarul 1.28 avem $\operatorname{ht} (P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d]) = \operatorname{ht} P_1 = 1$, ceea ce implică $h = d-1$. Atunci (11) este un lanţ maximal de ideale prime din $K[t_1, \ldots, t_{d-1}]$ căruia i se poate aplica ipoteza de inducţie pentru a conchide că are lungimea $d-1$. De aici rezultă $m = d$. □

Rezultatul tocmai demonstrat arată că algebrele afine au dimensiune finită. Vom arăta că există inele noetheriene de dimensiune infinită. Cum vom vedea ulterior, există domenii de integritate noetheriene de dimensiune finită în care se găsesc lanţuri maximale de ideale prime de lungimi diferite.

O construcţie simplă ce furnizează exemple de inele noetheriene de dimensiune infinită a fost expusă de M. Nagata. Acesta demonstrează un criteriu de noetherianitate (propoziţia 2.9 de mai jos) din care rezultă că pentru inelele semilocale, noetherianitatea este o proprietate locală.

LEMA 2.8. *Fie A un inel, I şi J două ideale ale lui A. Dacă $IA_M = JA_M$ pentru orice ideal maximal M al lui A, atunci $I = J$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $I \subseteq J$, concluzia rezultă din principiul local-global aplicat A-modulului J/I. Pentru a reduce cazul general

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

la această situaţie, se foloseşte $I \subseteq I + J$ şi comutarea localizării cu sumele de module. □

PROPOZIŢIE 2.9. *Fie A un inel cu următoarele proprietăţi:*

a) A_M este inel noetherian pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$,
b) orice element nenul al lui A este conţinut doar într-un număr finit de ideale maximale.

Atunci A este inel noetherian.

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că orice ideal nenul I este finit generat. Fie $M_1, \ldots, M_s$ toate idealele maximale ce conţin un element nenul a din I. Evident I nu este conţinut în alte ideale maximale. Pentru $i = 1, \ldots, s$ alegem o mulţime finită de elemente din I ale căror imagini în A_{M_i} generează IA_{M_i} şi notăm U reuniunea lor. Dacă J este idealul generat de mulţimea finită $U \cup \{ a \}$, avem $JA_M = IA_M$ pentru $M \in \{ M_1, \ldots, M_s \}$ şi $JA_M = A_M = IA_M$ pentru celelalte ideale maximale. Din lema precedentă se obţine $I = J$. □

EXEMPLU de inel noetherian de dimensiune infinită.

Fie $R := K[X_n : n \in \mathbb{N}]$ inelul de polinoame de o infinitate numărabilă de nedeterminate peste un corp K şi $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale pentru care şirul $(n_{i+1} - n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ este nemărginit. Pentru $j \in \mathbb{N}$ notăm P_j idealul lui R generat de X_i cu $n_j \leq i < n_{j+1}$. Întrucât P_j este ideal prim, $S := \bigcap_{j\in\mathbb{N}}(R \setminus P_j)$ este sistem multiplicativ închis. Idealele maximale ale inelului de fracţii $A := S^{-1}R$ sunt de forma $M_j := P_jA$, $j \in \mathbb{N}$. Din izomorfismul $A_{M_j} \simeq K[X_{n_j}, X_{n_j+1}, \ldots, X_{n_{j+1}-1}]$ rezultă că A îndeplineşte condiţia $a)$ din propoziţia precedentă. Un element nenul a al lui A provine dintr-un polinom f din R în care apar efectiv doar un număr finit de nedeterminate. Pentru indicii j pentru care n_j depăşeşte acest număr avem $f \notin P_j$, deci $a \notin M_j$. Conchidem că şi condiţia $b)$ din ipoteza propoziţiei 2.9 este îndeplinită. În consecinţă, inelul A este noetherian.

COROLAR 2.10. *Fie $P \subset Q$ ideale prime ale unei algebre afine A. Toate lanţurile maximale de ideale prime de extremităţi P şi Q au aceeaşi lungime* $\dim A/P - \dim A/Q$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_m = Q$ un astfel de lanţ şi $B := A/P$. Lanţul saturat $0 \subset P_1/P \subset \ldots \subset P_m/P$ din B poate fi prelungit până la un lanţ maximal de ideale prime din B. Lungimea acestuia este $\dim B$ conform propoziţiei precedente, iar porţiunea sa care începe cu Q/P corespunde unui lanţ maximal de ideale prime din algebra afină A/Q. Aşadar, $m = \dim A/P - \dim A/Q$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 2.11. *Fie $P_1, \dots, P_s$ idealele prime minimale ale K-algebrei afine A şi L_i corpul rezidual în P_i $(i = 1, \dots, s)$.*

a) $\dim A = \max\{ \operatorname{trdeg}_K L_i : i = 1, 2, \dots, s \}$.

În particular, $\dim A = \operatorname{trdeg}_K L$ *dacă A este domeniu de integritate de corp de fracţii L.*

b) Dacă $\dim A/P_i = \dim A/P_j$ *pentru* $1 \le i < j \le s$, *atunci*

$$\dim A = \operatorname{ht} P + \dim A/P \textit{ pentru orice } P \in \operatorname{Spec} A .$$

DEMONSTRAŢIE. Întrucât orice lanţ maximal de ideale prime din A începe cu un ideal prim minimal, este suficient să demonstrăm afirmaţiile pentru domenii de integritate. Pentru A domeniu se consideră o normalizare Noether $K[y_1, \dots, y_d] \subseteq A$. Evident $d = \dim A$ coincide cu gradul de transcendenţă al lui L peste K. Relaţia de la *b*) rezultă din corolarul 2.10. $\square$

COROLAR 2.12. *Dimensiunea unei K-algebre afine coincide cu numărul maxim de elemente din A care sunt algebric independente peste K. Dacă $B \subset A$ este o altă K-algebră afină, atunci* $\dim B \le \dim A$.

DEMONSTRAŢIE. Notăm $d = \dim A$ şi observăm că din lema de normalizare rezultă că este suficient să arătăm că dacă $z_1, \dots, z_m \in A$ sunt algebric independente peste K, atunci $m \le d$. Dacă $P_1, \dots, P_s$ sunt idealele prime minimale ale lui A, avem

$$0 = \Big(\bigcap_{i=1}^{s} P_i\Big) \cap K[z_1, \dots, z_m] = \bigcap_{i=1}^{s} (P_i \cap K[z_1, \dots, z_m])$$

întrucât nu există elemente nilpotente nenule în inelul de polinoame $C := K[z_1, \dots, z_m]$. Din această egalitate şi din faptul că C este domeniu de integritate se deduce existenţa unui indice i, $1 \le i \le s$, astfel ca $P_i \cap C = 0$. Prin urmare $C \subseteq A/P_i$. Notând cu L corpul de fracţii al lui A/P_i, din corolarul 2.11 se obţine

$$m = \operatorname{trdeg}_K C \le \operatorname{trdeg}_K L \le \dim A .$$

Pentru a demonstra ultima parte a concluziei, observăm că orice elemente din B care sunt algebric independente peste K rămân algebric independente când sunt considerate ca elemente ale lui A. $\square$

COROLAR 2.13. *Fie A şi B două K-algebre afine nenule şi L/K o extindere de corpuri.*

a) $\dim A = \dim(L \otimes_K A)$, $\dim(A \otimes_K B) = \dim A + \dim B$.

b) Dacă A este domeniu de integritate, atunci

$$\dim A = \dim(L \otimes_K A)/P$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

pentru orice ideal prim minimal P al lui $L \otimes_K A$. Dacă şi B este domeniu de integritate, atunci

$$\dim(A \otimes_K B)/Q = \dim A + \dim B$$

pentru orice ideal prim minimal Q al lui $A \otimes_K B$.

DEMONSTRAŢIE. Se consideră normalizări Noether $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq \subseteq A$ şi $K[z_1, \ldots, z_t] \subseteq B$. Folosind izomorfismele canonice

$$L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d] \simeq L[y_1, \ldots, y_d] \ ,$$

$$K[y_1, \ldots, y_d] \otimes_K K[z_1, \ldots, z_t] \simeq K[y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_t] \ ,$$

se verifică uşor că $L[y_1, \ldots, y_d] \subseteq L \otimes_K A$ şi $K[y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_t] \subseteq \subseteq A \otimes_K B$ sunt normalizări Noether. Cu aceasta, deducerea formulelor de la punctul $a)$ se încheie.

Pentru a demonstra $b)$, notăm cu F corpul de fracţii al lui A şi folosim diagrama comutativă de inele cu morfisme injective canonice

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d] & \longrightarrow & L \otimes_K A \\ \downarrow & & \downarrow \\ L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d) & \longrightarrow & L \otimes_K F \end{array}$$

Întrucât există o bază pentru F peste corpul $K(y_1, \ldots, y_d)$, rezultă că $L \otimes_K F$ este $L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d)$-modul liber. Prin urmare, orice element nenul din $L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d)$ este nondivizor al lui zero în $L \otimes_K F$. Deducem că $P \cap (L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d]) = 0$ pentru că P, fiind ideal prim minimal în $L \otimes_K A$, constă doar din divizori ai lui zero. Atunci $L[y_1, \ldots, y_d] \subseteq (L \otimes_K A)/P$ este normalizare Noether căreia i se aplică propoziţia 2.7 pentru a obţine prima dintre egalităţile de la $b)$. A doua formulă de la $b)$ se demonstrează asemănător cu ajutorul diagramei comutative

$$\begin{array}{ccc} K[y_1, \ldots, y_d] \otimes_K K[z_1, \ldots, z_t] & \longrightarrow & A \otimes_K B \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(y_1, \ldots, y_d) \otimes_K K(z_1, \ldots, z_t) & \longrightarrow & A \otimes_K N \end{array}$$

unde N este corpul de fracţii al lui B. □

EXERCIŢII.

1. În condiţiile şi notaţiile lemei de normalizare, arătaţi că pentru I ideal prim şi K corp de caracteristică zero există g_h un polinom în Y_h cu coeficienţi în $K(Y_{h+1}, \ldots, Y_n)$ astfel încât

$$Q(A/I) = K(Y_{h+1}, \ldots, Y_n)[Y_h]/(g_h) \ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Fie $f_1, \ldots, f_n$ polinoame în nedeterminata T cu coeficienţi într-un corp K astfel încât $K[T]$ este extindere finită a subalgebrei $A := K[f_1, \ldots, f_n]$ şi $K(T) = K(f_1, \ldots, f_n)$. Arătaţi că T este element întreg peste A.

3. Funcţia Hilbert-Samuel

Teoria dimensiunii Krull a algebrelor afine este bine pusă la punct şi şi-a dovedit utilitatea în algebră şi geometria algebrică. Tentaţia de a o extinde la alte clase de inele este puternică. Reuşită în contextul următor.

O funcţie numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este numită *funcţie polinomială* (de grad d) dacă, pentru valori suficient de mari ale argumentului, ia aceleaşi valori ca şi un polinom (de grad d) de o nedeterminată cu coeficienţi raţionali.

În acest context este util a accepta convenţia ca gradul polinomului nul să fie -1. Este clar că există un singur polinom care coincide cu o funcţie polinomială; acest polinom se numeşte *polinomul asociat funcţiei polinomiale.*

Pentru a explicita definiţia, fixăm o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{Q}[X]$ peste $\mathbb{Q}$. Din motive ce vor transpare curând, este preferabil a considera baza formată din polinoamele

$$\binom{X}{k} := \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \quad \text{pentru } k \geq 1, \quad \binom{X}{0} := 1.$$

Aşadar, pentru o funcţie polinomială f de grad $d \geq -1$ există un număr natural n_0 şi $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{pentru } n \geq n_0$$

şi $c_d \neq 0$ dacă $d \geq 0$.

Definim *operatorul diferenţă* Δ pe mulţimea funcţiilor numerice punând $(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătăm că Δf este o funcţie polinomială simultan cu f.

LEMA 3.1. *O funcţie numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este polinomială dacă şi numai dacă Δf este funcţie polinomială. Operatorul diferenţă Δ coboară gradul funcţiilor polinomiale nenule cu 1.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0 ,$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

cu $n_0 \in \mathbb{N}$ convenabil ales, şi $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ cu c_d nenul dacă $d \geq 0$, atunci

$$(\Delta f)(n) = \sum_{k=0}^{d-1} c_{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{pentru } n \geq n_0$$

datorită binecunoscutei identităţi satisfăcute de coeficienţii binomiali

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} .$$

Reciproc, dacă există întregii $d \geq -1$, $n_0 \geq 0$ şi numerele raţionale $c_0, \ldots, c_d$ astfel încât $c_d \neq 0$ pentru $d \geq 0$ şi

$$(\Delta f)(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0 ,$$

atunci funcţia diferenţă Δf ia pentru $n \geq n_0$ aceleaşi valori ca şi Δg, unde $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este funcţia polinomială definită prin formula

$$g(n) := \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k+1} , \; n \in \mathbb{Z} .$$

Prin urmare, pentru $n \geq n_0$ avem $f(n+1) - f(n) = g(n+1) - g(n)$, ceea ce înseamnă $f(n+1) - g(n+1) = f(n) - g(n) =: c$. Conchidem că f ia aceleaşi valori ca şi funcţia polinomială $g + c$ pentru toate valorile argumentului ce depăşesc n_0. □

Să notăm $\Delta^0 f = f$, $\Delta^1 f = \Delta f$ şi $\Delta^t f = \Delta^{t-1}(\Delta f)$ pentru $t \geq 2$ întreg.

LEMA 3.2. *Pentru $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ funcţie numerică şi d un număr natural, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) există un întreg nenul c astfel încât $\Delta^d f(n) = c$ pentru $n \gg 0$,
(ii) f este funcţie polinomială de grad d.

DEMONSTRAŢIE. Faptul că (i) este consecinţă a condiţiei (ii) rezultă imediat din lema precedentă. Implicaţia reciprocă se demonstrează prin inducţie după d.

Pasul iniţial $d = 0$ este clar. Presupunem în continuare $d > 0$ şi

$$\Delta^d f(n) = \Delta^{d-1}(f(n+1) - f(n)) = c, \; c \neq 0, \text{ pentru } n \gg 0.$$

Din ipoteza de inducţie rezultă existenţa unui număr natural n_0 şi a unui polinom $P \in \mathbb{Q}[X]$ de grad $d-1$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = P(n)$ pentru $n \geq n_0$. Atunci

$$f(n+1) = f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n} P(k) \quad \text{pentru } n \geq n_0 .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Suma din expresia precedentă este o funcţie polinomială de grad cu unu mai mare decât gradul lui P. □

Următorul rezultat clarifică ce polinoame din $\mathbb{Q}[X]$ iau valori întregi.

LEMA 3.3. *Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad $d \geq 0$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *$P(n) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$,*

(*ii*) *există întregii $c_0, \ldots, c_d$ astfel încât $c_d \neq 0$ şi*

$$P = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{X}{k},$$

(*iii*) *există întregii $e_0, \ldots, e_d$ astfel încât $e_d \neq 0$ şi*

$$P = \sum_{k=0}^{d} e_k \binom{X+k}{k}.$$

DEMONSTRAŢIE. Echivalenţa afirmaţiilor (*ii*) şi (*iii*) se obţine cu ajutorul schimbării de variabilă $X \mapsto -X-1$, care arată $c_k = (-1)^k e_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, d$. Singura implicaţie ce necesită justificare este $(i) \Longrightarrow (ii)$. Vom proceda prin inducţie după d.

Situaţia este clară pentru $d = 0$. Presupunând adevărat rezultatul pentru $d-1$, din demonstraţia lemei 3.1 rezultă că ΔP este funcţie polinomială de grad $d-1$ pentru care

$$\Delta P(n) = \sum_{k=0}^{d-1} c_{k+1} \binom{n}{k}.$$

Conform ipotezei de inducţie, $c_1, \ldots, c_d$ sunt toate întregi. Demonstraţia se încheie observând

$$c_0 = P(n) - \sum_{k=1}^{d} c_k \binom{n}{k}.$$

□

Lăsăm ca un exerciţiu util demonstrarea relaţiilor $c_k = \Delta^k P(0)$ pentru $k = 0, 1, \ldots, d$.

Oricărei funcţii numerice $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ i se asociază o serie cu coeficienţi întregi $H(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)t^n$ numită *seria generatoare* a funcţiei f. Reciproc, având o serie $H(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ cu coeficienţi întregi, se poate defini o funcţie numerică punând $f(n) := a_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{Z}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

LEMA 3.4. *Fie $H(t) = \sum a_n t^n$ o serie Laurent cu coeficienţi întregi (i.e. $a_i = 0$ pentru $i \ll 0$) şi $d \in \mathbb{N}^*$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *există un polinom $P \in \mathbb{Q}[X]$ de grad $d-1$ astfel încât*

$$P(n) = a_n \quad \text{pentru} \quad n \gg 0 \ ,$$

(*ii*) *există un polinom Laurent $Q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ astfel încât*

$$H(t) = Q(t)/(1-t)^d \quad \text{şi} \quad Q(1) \neq 0 \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem condiţia (*i*) îndeplinită. Funcţia numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definită prin formula $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, verifică relaţia

$$(1-t)^d H(t) = \sum_n \Delta^d f(n-d) t^n \ .$$

Din lema 3.2 rezultă că membrul stâng al acestei relaţii este un polinom Laurent $Q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Din $Q(1) = 0$ se obţine

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_n \Delta^d f(n-d) = \sum_n \big(\Delta^{d-1} f(n+1-d) - \Delta^{d-1} f(n-d)\big) = \\ &= \Delta^{d-1} f(n) \quad \text{pentru } n \gg 0 \ , \end{aligned}$$

ceea ce contrazice lema 3.2. Aşadar, $Q(1) \neq 0$, ceea ce încheie demonstraţia faptului că (*ii*) este consecinţă a condiţiei (*i*).

Implicaţia reciprocă se demonstrează asemănător. □

Fie $B = \oplus_{n \geq 0} B_n$ un inel graduat, cu B_0 inel artinian. Presupunem că B este B_0-algebră de tip finit, generată de elemente de gradul întâi $b_1, \ldots, b_r \in B_1$. Unii autori folosesc denumirea de *inel graduat standard* sau *algebră omogenă* (îndeosebi dacă B_0 este corp). Pentru orice B-modul graduat $G = \oplus_{n \geq 0} G_n$ de tip finit, fiecare componentă G_n este modul finit generat peste inelul artinian B_0, deci are lungime finită.

LEMA 3.5. *Funcţia numerică $H_G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definită prin formula $H_G(n) := l_{B_0}(G_n)$ este polinomială. Polinomul asociat funcţiei H_G are gradul strict mai mic decât numărul generatorilor B_0-algebrei B.*

DEFINIŢIE 3.6. În condiţiile lemei precedente, funcţia polinomială $H_G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definită prin formula $H_G(n) := l_{B_0}(G_n)$ este numită *funcţia Hilbert a B-modulului G.*

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după r. În cazul $r = 0$, ceea ce înseamnă $B = B_0$ inel artinian, avem $G_n = 0$ pentru n suficient de mare, deci polinomul nul coincide aproape peste tot cu funcţia H_G. Presupunem acum că $r \geq 1$ şi că lema este valabilă pentru inelele graduate generate peste componenta de grad 0, presupusă a fi inel artinian, de $r-1$ elemente omogene de gradul întâi .

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Notăm $C := B_0[b_1, \ldots, b_{r-1}]$ subinelul lui B generat de $b_1, \ldots, b_{r-1}$ şi considerăm $\lambda : G \longrightarrow G$ omotetia lui G definită de b_r. Din şirul exact de B_0-module $0 \longrightarrow E_n \longrightarrow G_n \longrightarrow F_n \longrightarrow 0$, unde $E := \ker \lambda$ şi $F := \operatorname{coker} \lambda$, se obţine, folosind aditivitatea funcţiei lungime,

$$l_{B_0}(G_{n+1}) - l_{B_0}(G_n) = l_{B_0}(F_{n+1}) - l_{B_0}(E_n) \ .$$

Cum E şi F sunt C-module graduate pentru care concluzia lemei este valabilă, funcţia din membrul drept al acestei relaţii este funcţie polinomială de grad strict mai mic decât $r-1$. În membrul stâng figurează funcţia diferenţă pentru funcţia Hilbert asociată B-modulului G. Conform lemei 3.1 H_G este funcţie polinomială de grad $< (r-1)+1 = r$. □

Exemple concrete de inele graduate cu proprietăţile cerute se obţin pornind de la orice inel noetherian A şi de la un ideal al său I al cărui radical este intersecţie finită de ideale maximale. În aceste condiţii A/I este inel artinian. Pentru orice A-modul E cu proprietatea că E/IE este A/I-modul de tip finit, funcţia

$$n \mapsto HS_{E,I}(n) := l_{A/I}(E/I^nE) = l_A(E/I^nE)$$

este polinomială şi de grad cel mult egal cu numărul minim de generatori ai idealului I.

Într-adevăr,

$$\Delta HS_{E,I}(n) = l_{A/I}(I^nE/I^{n+1}E) = l_A(I^nE/I^{n+1}E)$$

este funcţia caracteristică asociată lui $B :=\mathrm{gr}_I(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ şi $G :=\mathrm{gr}_I(E) := \sum_{n\in\mathbb{N}} I^nE/I^{n+1}E$. Mai trebuie observat că inelul graduat B este generat peste componenta sa omogenă de grad zero $\mathrm{gr}_I^0(A) = A/I$ de clasele în $\mathrm{gr}_I^1(A) = I/I^2$ ale unui sistem minimal de generatori ai lui I. Inelele graduate au fost considerate pentru prima oară de către Krull, în scopul de a putea folosi raţionamente uzuale în inele de polinoame în care se invocă gradul unui element şi se compară coeficienţi.

Definiţie 3.7. În condiţiile precizate mai sus, funcţia $HS_{E,I}$ se numeşte *funcţia Hilbert-Samuel asociată lui I şi E*. Vom nota cu $d(E)$ gradul funcţiei polinomiale $HS_{E,I}$.

Am evitat să folosim pentru gradul $d(E)$ o notaţie în care figurează idealul I nu numai pentru a simplifica notaţia, ci mai ales pentru că $d(E)$ depinde de *radicalul* lui I şi nu de idealul însuşi. Pentru a justifica această remarcă, să presupunem că J este un alt ideal al cărui radical este $\mathrm{Rad}_A(I)$. Atunci există numerele naturale s şi t astfel încât $J^s \subseteq I$ şi $I^t \subseteq J$. Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$l_A(E/J^nE) \leq l_A(E/I^{nt}E) \text{ şi } l_A(E/I^nE) \leq l_A(E/J^{ns}E) \ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rezultă inegalităţile

$$HS_{E,J}(n) \leq HS_{E,I}(nt) \leq HS_{E,J}(nst) \text{ pentru } n \in \mathbb{N} ,$$

din care se deduce că funcţiile $HS_{E,J}$ şi $HS_{E,I}$ au acelaşi grad şi acelaşi coeficient dominant.

În restul secţiunii A şi I vor fi un inel, respectiv un ideal, cu proprietăţile precizate anterior definiţiei 3.7.

TEOREMA 3.8. *(Lema Artin-Rees) Fie A un inel noetherian, I un ideal al său, E un A-modul finit generat şi F un submodul al lui E. Atunci există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$I^{n+s}E \cap F = I^n(I^sE \cap F) \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N} .$$

DEMONSTRAŢIE. Vom considera inelul graduat

$$\mathcal{R}_I(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n ,$$

în care înmulţirea este definită în mod evident, şi $\mathcal{R}_I(A)$-modulul graduat

$$\mathcal{R}_I(E) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^nE .$$

Deoarece I este A-modul finit generat, $\mathcal{R}_I(A)$ este A-algebră de tip finit, deci inel noetherian. Întrucât $\mathcal{R}_I(E)$ este $\mathcal{R}_I(A)$-modul de tip finit, rezultă că este modul noetherian. Atunci $\mathcal{R}_I(A)$-submodulul său graduat

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n ,$$

unde $F_n := I^nE \cap F$, este generat de elemente omogene $x_1, \ldots, x_k$. Fie $e_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_i \in I^{e_i}E \cap F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ şi $s := \max\{ e_1, \ldots, e_k \}$. Evident $I^nF_s \subseteq F_{n+s}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi vom arăta că această incluziune este de fapt egalitate.

Orice $x \in F_{n+s}$ se scrie sub forma $x = b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$ cu $b_i \in \mathcal{R}_I(A)$ omogen de grad $n + s - e_i$, adică $b_i \in I^{n+s-e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Rezultă $x \in I^nF_s$. □

LEMA 3.9. *Fie $0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$ un şir exact de A-module în care G este de tip finit. Atunci are loc relaţia*

$$HS_{G,I} = HS_{E,I} + HS_{F,I} + \phi ,$$

unde ϕ este o funcţie polinomială de grad strict mai mic decât gradul lui $HS_{E,I}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Din şirul exact

$$0 \longrightarrow E/(I^nG \cap E) \longrightarrow G/I^nG \longrightarrow F/I^nF \longrightarrow 0$$

şi din aditivitatea lungimii rezultă

$$l_A(G/I^nG) = l_A(E/(I^nG \cap E)) + l_A(F/I^nF) \ .$$

Din lema Artin-Rees se cunoaşte că există un număr natural s astfel ca

$$I^{n+s}E \subseteq I^{n+s}G \cap E = I^n(E \cap I^sG) \subseteq I^nE \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \ .$$

Prin urmare

$$HS_{E,I}(n+s) \geq HS_{I^sG\cap E,I}(n) \geq HS_{E,I}(n) \ .$$

Astfel $HS_{E,I}$ şi $HS_{I^sG\cap E,I}$ au acelaşi termen de grad maxim, încât diferenţa lor ϕ este fie nulă, fie funcţie polinomială de grad strict mai mic decât $d(E)$. □

COROLAR 3.10. *Fie E un A-modul noetherian şi $F := \mathrm{Ann}_E(a)$, cu $a \in A$. Atunci funcţia polinomială $HS_{F,I} - HS_{E/aE,I}$ are gradul strict mai mic decât cel al funcţiei $HS_{E,I}$.*

DEMONSTRAŢIE. Afirmaţia rezultă din lema anterioară aplicată şirurilor exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} aE \longrightarrow 0 \quad \text{şi} \quad 0 \longrightarrow aE \longrightarrow E \longrightarrow E/aE \longrightarrow 0,$$

unde α este omotetia definită de a. □

EXERCIŢII.

1. Fie I un ideal în $A := K[X_1, \ldots, X_r]$, $r \geq 1$. Definim *funcţia Hilbert afină* prin relaţia

$$\mathrm{AH}_I(n) := \dim_K(A_{\leq n}/I_{\leq n}) \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

unde $A_{\leq n} := \{ f \in A \mid \text{grad } f \leq n \}$ şi analog $I_{\leq n}$.

a) Arătaţi că pentru orice număr natural n are loc egalitatea

$$\mathrm{AH}_I(n) = \mathrm{H}_{A[Y]/I_h}(n) \ ,$$

unde I_h este imaginea idealului I prin morfismul de omogenizare

$$\phi : A \longrightarrow A[Y] \ , \ \phi(f) := Y^{\text{grad } f} f\left(X_1 \cdot Y^{-1}, \ldots, X_r \cdot Y^{-1}\right) \ .$$

b) Calculaţi funcţia Hilbert afină pentru cazul particular

$$I := (X^3 + Y^2 + Z) \leq K[X, Y, Z] \ .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4. Dimensiunea Krull a inelelor semilocale noetheriene

În această secţiune vom folosi implicit următoarele ipoteze şi notaţii: A este un inel semilocal noetherian, J este un ideal conţinut în radicalul Jacobson al lui A, iar E este un A-modul finit generat.

Începem prin a consemna o consecinţă directă a teoremei I.4.5:

PROPOZIŢIE 4.1. *Pentru orice ideal I al lui A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A este inel semilocal şi există întregul pozitiv t astfel încât $J^t \subseteq I \subseteq J$,*

(*ii*) *orice ideal maximal conţine I şi orice ideal prim ce conţine I este maximal,*

(*iii*) *$I \subseteq J$ şi A/I este inel artinian.*

DEFINIŢIE 4.2. Un ideal I cu proprietăţile din propoziţia precedentă se numeşte *ideal de definiţie al lui A.*

PROPOZIŢIE 4.3. *Pentru un număr natural n, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel ca $l_A(E/(a_1E + \cdots + a_nE)) < \infty$,*

(*ii*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel că orice prim asociat A-modulului $E/(a_1E + \cdots + a_nE)$ este maximal,*

(*iii*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel că orice prim din suportul A-modulului $E/(a_1E + \cdots + a_nE)$ este maximal,*

(*iv*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel ca $\dim_A(E/(a_1E + \cdots + a_nE)) = 0$,*

(*v*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ ale căror imagini în $B := A/\mathrm{Ann}\ (E)$ generează un ideal de definiţie pentru acest inel semilocal,*

(*vi*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel încât idealul $\mathrm{Ann}\ (E) + (a_1, \ldots, a_n)A$ conţine o putere a radicalului Jacobson al lui A.*

DEFINIŢIE 4.4. Notăm $s(E)$ numărul definit prin proprietăţile echivalente din rezultatul precedent. O familie de elemente $a_1, \ldots, a_{s(E)}$ din J se numeşte *sistem de parametri ai lui E* dacă

$$l_A(E/(a_1E + \cdots + a_{s(E)}E)) < \infty \; .$$

DEFINIŢIE 4.5. Un inel noetherian şi local (A, M, K) se numeşte *regulat* dacă M este generat de un sistem de parametri ai lui A. Un

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

sistem de parametri care generează idealul maximal al unui inel local regulat se numeşte *sistem regulat de parametri.*

LEMA 4.6. *Fie* $b_1, \ldots, b_t \in J$ *şi* $F := E/(b_1E + \cdots + b_tE)$. *Atunci* $s(F) \geq s(E) - t$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $b_1, \ldots, b_t$ *fac parte dintr-un sistem de parametri ai lui* F.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $c_1, \ldots, c_{s(F)}$ este un sistem de parametri ai lui F, atunci modulul

$$F/(c_1F + \cdots + c_{s(F)}F) \simeq E/(b_1E + \cdots + b_tE + c_1E + \cdots + c_{s(F)}E)$$

este de lungime finită. Prin urmare, $t + s(F) \geq s(E)$. Dacă inegalitatea precedentă devine egalitate, înseamnă că $b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_{s(F)}$ este un sistem de parametri ai lui E. Reciproc, dacă există $b_{t+1}, \ldots, b_{s(E)}$ astfel încât $b_1, \ldots, b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{s(E)}$ este sistem de parametri ai lui E, atunci

$$E/(b_1E + \cdots + b_{s(E)}E) \simeq F/(b_{t+1}F + \cdots + b_{s(E)}F)$$

este de lungime finită. Atunci $s(F) \leq s(E) - t$. □

Rezultatul următor are o importanţă deosebită. Din el rezultă imediat că orice inel semilocal noetherian are dimensiunea finită. Alte consecinţe ale sale vor fi enunţate după ce îl vom fi demonstrat.

TEOREMA 4.7. *(Teorema Krull-Chevalley-Samuel) Pentru* A *un inel semilocal noetherian şi* E *un* A*-modul finit generat au loc egalităţile* $\dim_A E = d(E) = s(E)$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru a stabili inegalitatea $d(E) \leq s(E)$, considerăm $a_1, \ldots, a_{s(E)} \in J$ un sistem de parametri ai lui E. Atunci există numărul natural t astfel încât $J^tE \subseteq a_1E + \cdots + a_{s(E)}E \subseteq JE$. Se foloseşte definiţia 3.7 pentru inelul $A/\mathrm{Ann}(E)$ şi se observă că funcţia Hilbert-Samuel asociată lui E şi J coincide cu funcţia Hilbert-Samuel asociată lui $E/\mathrm{Ann}(E)E$ şi $(J + \mathrm{Ann}(E))/\mathrm{Ann}(E)$. Se ştie de asemenea că gradul funcţiei Hilbert-Samuel nu depăşeşte numărul minim de generatori ai unui ideal al cărui radical coincide cu radicalul idealului în care se calculează funcţia Hilbert-Samuel.

Inegalitatea $\dim_A E \leq d(E)$ se justifică prin recurenţă după gradul $d(E)$. Pentru $d(E) = 0$, valoarea $HS_{E,J}(n)$ este aceeaşi pentru n suficient de mare, deci $l_A(J^nE/J^{n+1}E) = 0$ pentru $n \gg 0$. Aceasta înseamnă că $J^nE = J^{n+1}E$ şi, conform lemei lui Nakayama, implică $J^nE = 0$. Cu alte cuvinte, $\mathrm{Ann}(E)$ conţine J^n şi deci $\dim E = 0$. Fie $d(E) > 0$. Următorul pas al demonstraţiei va fi reducerea la cazul în care E este imagine omomorfă integră a inelului. Se alege P_0 un ideal prim minimal peste $\mathrm{Ann}(E)$ astfel încât $\dim\,(A/P_0) = \dim E$. Cum E

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

este modul de tip finit peste un inel noetherian, există $x \in E$ al cărui anulator coincide cu P_0. Atunci $A/P_0 \simeq Ax =: F$. Deoarece dim $E =$ =dim F (conform alegerilor făcute) şi $d(F) \le d(E)$ (conform lemei 3.9), este suficient a justifica relaţia dim $F \le d(F)$. Vom arăta că lungimea oricărui lanţ strict ascendent de ideale prime $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_t$ este cel mult $d(F)$. Afirmaţia este evident adevărată pentru $t = 0$. Fie $t \ge 1$. Atunci există $a \in P_1 \setminus P_0$. Din

$$P_0 \subset \mathrm{Ann}(F/aF) = P_0 + aA \subseteq P_1$$

rezultă

$$\dim(F/aF) = \dim F - 1 \ge t - 1 \ . \tag{13}$$

Observăm că a este nondivizor al lui zero pe F (echivalent, omotetia definită de a pe F este injectivă) şi folosim corolarul 3.10 pentru a conchide

$$\dim(F/aF) \le d(F) - 1 \ . \tag{14}$$

Se poate invoca ipoteza de inducţie pentru a trage concluzia

$$\dim(F/aF) \le d(F/aF) \ . \tag{15}$$

Din relaţiile (13)–(15) rezultă $t \le d(F)$, echivalentă cu relaţia dorită dim $E \le d(E)$.

Pentru a proba inegalitatea $s(E) \le$ dim E, folosim din nou un raţionament inductiv, de această dată după dimensiunea modulului. Pentru dim $E = 0$, inelul $A/\mathrm{Ann}(E)$ este noetherian şi zero-dimensional, deci de lungime finită. Prin urmare, $s(E) = 0$. Fie dim $E \ge 1$ şi o descompunere primară redusă $\mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}(E)) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, unde Q_i sunt ideale prime numerotate astfel încât dim $(A/Q_j) =$ dim E dacă şi numai dacă $1 \le j \le r$, pentru un anumit întreg r cuprins între 1 şi s. Cum nici unul dintre idealele Q_j nu este maximal, există $a \in J \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_r)$. De aici decurge dim $E \ge$ dim $(E/aE) + 1$. Din lema precedentă ştim $s(E) \le s(E/aE) + 1$, deci ipoteza de inducţie este îndeplinită de E/aE: $s(E/aE) \le$ dim (E/aE). Prin urmare

$$s(E) \le s(E/aE) + 1 \le \dim(E/aE) + 1 \le \dim E \ .$$

□

COROLAR 4.8. *În condiţiile teoremei Krull-Chevalley-Samuel, pentru orice $a \in A$ are loc inegalitatea* $\dim E \le \dim(E/aE) + 1$. *iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă a nu aparţine nici unui ideal prim $P \supseteq$ Ann (E) cu proprietatea* $\dim(E) = \dim(A/P)$.

COROLAR 4.9. *Dimensiunea unui inel semilocal este egală cu numărul minim de elemente din radical care generează un ideal de definiţie al inelului.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 4.10. *Dacă (A, M, K) este un inel local şi noetherian, dimensiunea lui A nu depăşeşte rangul K-spaţiului vectorial M/M^2:*

$$\dim A \leq \mu(M) = \text{edim } (A) ,$$

cu egal dacă şi numai dacă inelul este regulat.

DEMONSTRAŢIE. Din lema lui Nakayama rezultă că un sistem de elemente $a_1, \ldots, a_d$ din M ale căror clase modulo M^2 formează o bază a K-spaţiului vectorial M/M^2 generează pe M. Apoi se aplică rezultatul precedent. □

COROLAR 4.11. *Fie B un inel noetherian, P un ideal prim al său şi $n \in \mathbb{N}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) $\dim(B_P) \leq n$,

(*ii*) *există $b_1, \ldots, b_n \in B$ astfel încât P este un ideal prim minimal care conţine idealul generat de aceste elemente.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă (*i*) este îndeplinită, există $b_1, \ldots, b_n \in B$ şi $s \in B \setminus P$ astfel încât $b_1/s, \ldots, b_n/s$ generează în B_P un ideal PB_P-primar. Din corespondenţa dintre idealele prime ale unui inel şi cele ale unui localizat al său rezultă condiţia (*ii*).

Reciproc, datorită corespondenţei amintite, din condiţia (*ii*) rezultă că $(b_1, \ldots, b_n)B_P$ este ideal PB_P-primar. Se aplică din nou corolarul 4.9. □

Cazul particular $n = 1$ al rezultatului precedent este cunoscut sub numele de

TEOREMA IDEALULUI PRINCIPAL A LUI KRULL. *Un ideal prim al unui inel noetherian este de înălţime cel mult unu dacă şi numai dacă este divizor prim minimal al unui ideal principal.*

COROLAR 4.12. *Orice ideal prim minimal peste un nondivizor al lui zero are înălţimea unu.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $P \in \text{Spec } A$ un ideal prim minimal peste $a \notin Z(A) = \cup\{Q : Q \in \text{Ass } A\}$. Din teorema idealului principal rezultă ht $P \leq 1$. Dacă ht $P = 0$, atunci $P \in \text{Min } A \subseteq \text{Ass } A$, deci P constă numai din divizori ai lui zero. Dar prin ipoteză P conţine un nondivizor al lui zero, anume a. □

COROLAR 4.13. *Într-un inel noetherian, lanţurile descrescătoare de ideale prime sunt staţionare.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Într-adevăr, idealul iniţial al unui astfel de lanţ este finit generat. Conform teoremei idealului principal, înălţimea acestui ideal nu depăşeşte cardinalul unui sistem de generatori, deci lanţul considerat este staţionar. □

COROLAR 4.14. *Pentru un domeniu noetherian B, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *B este inel semilocal de dimensiune cel mult* 1,

(ii) *B_f este corp pentru orice element nenul f din radicalul Jacobson al lui B,*

(iii) *există un element nenul f în B astfel ca B_f să fie corp.*

DEMONSTRAŢIE. Din (i) rezultă că $\operatorname{Spec} B = \{0\} \cup \operatorname{Max} B$ este o mulţime finită. Condiţia (ii) este evident îndeplinită dacă B este corp. În caz contrar, pentru f nenul din radicalul Jacobson, singurul ideal prim al lui B_f este idealul nul.

Să presupunem acum că B_f este corp, unde $f \neq 0$. Atunci f aparţine tuturor idealelor prime nenule din B. Fie $P_1, \ldots, P_n$ toate idealele prime minimale peste f. Vom arăta că fiecare dintre ele este ideal maximal în B. Dacă există $M \in \operatorname{Max} B$ şi $b \in M \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_n)$, din ipoteza integrităţii inelului B şi din corolarul 4.12 rezultă că orice ideal prim Q minimal peste bB are înălţimea 1. Prin urmare Q este minimal peste idealul fB, deci ar trebui să coincidă cu unul dintre idealele $P_1, \ldots, P_n$, ceea ce este exclus întrucât $b \in Q$, iar b nu aparţine mulţimii $P_1 \cup \ldots \cup P_n$. □

PROPOZIŢIE 4.15. *Pentru orice ideal I al unui inel noetherian A au loc relaţiile*

$$\operatorname{ht} I \leq \mu(I/I^2) \leq \mu(I) \leq \mu(I/I^2) + 1 .$$

DEMONSTRAŢIE. Din lema lui Nakayama se obţine $\mu(I_P/I_P^2) = \mu(I_P)$ pentru orice $P \in \mathrm{V}(I)$, iar din teorema idealului principal rezultă $\operatorname{ht}(I_P) \leq \mu(I_P)$. De aici se deduce $\operatorname{ht} I \leq \mu(I/I^2)$.

Inegalitatea din mijloc este consecinţă directă a definiţiei.

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta, considerăm elemente $a_1, \ldots, a_n$ din I ale căror clase modulo I^2 formează un sistem minimal de generatori pentru A/I-modulul I/I^2. Notăm $B := A/(a_1, \ldots, a_n)A$, $J := I/(a_1, \ldots, a_n)A$ şi observăm că $J = J^2$. Vom arăta că orice ideal idempotent este principal.

Fie $b_1, \ldots, b_s$ un sistem de generatori ai lui J. Egalitatea $J = J^2$ este echivalentă cu $b_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} b_j$, $i = 1, \ldots, s$, pentru nişte elemente $c_{ij} \in A$. Açest sistem este echivalent cu $\sum_{j=1}^{s} (\delta_{ij} - c_{ij}) b_j = 0$, $i = 1, \ldots, s$, unde δ_{ij} desemnează simbolulul lui Kronecker. Înmulţind cu

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

adjuncta matricei sistemului, se găseşte în anulatorul idealului J un element de forma $1 - e$, cu $e \in J$. Relaţiile $e(1-e) \in J\text{Ann } J = 0$ şi $(1-e)b_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$, implică $J = eB$.

Demonstraţia propoziţiei se încheie observând că din faptul că J este principal rezultă că I este generat de preimaginea generatorului lui J împreună cu $a_1, \ldots, a_n$. □

Vom preciza comportarea dimensiunii Krull la schimbarea inelului. În demonstraţii vom folosi o construcţie prin care un inel se scufundă în inelul endomorfismelor unui modul.

Fie A un inel comutativ şi E un A-modul. Operaţiile de adunare şi compunere a morfismelor înzestrează $\text{End}_A(E) := \text{Hom}_A(E, E)$ cu o structură de inel necomutativ. Inelul A-endomorfismelor lui E este A-algebră via morfismul de inele $\theta : A \longrightarrow \text{End}_A(E)$ definit prin $\theta(a)(x) := a \cdot x$ pentru $a \in A$ şi $x \in E$. Morfismul $\theta(a)$ este omotetia lui E determinată de a. Subinelul $\text{Im } \theta$ al inelului A-endomorfismelor lui E este evident izomorf cu $A/\text{Ann}(E)$.

PROPOZIŢIE 4.16. *Fie B o algebră peste inelul noetherian A prin intermediul unui morfism de inele $u : A \longrightarrow B$. Dacă F este un B-modul care este A-modul de tip finit prin restricţia scalarilor, atunci* $\dim_A(F) = \dim_B(F)$.

DEMONSTRAŢIE. Dimensiunea lui F ca B-modul (resp. A-modul) este dată de dimensiunea Krull a inelului B-omotetiilor (resp. A-omotetiilor) lui F. Se observă că u induce o injecţie canonică şi finită $\overline{A} := A/\text{Ann}_A(F) \longrightarrow \overline{B} := B/\text{Ann}_B(F)$, astfel încât $\overline{B}$ este $\overline{A}$-modul de tip finit. Din teorema GU 1.22 rezultă

$$\dim_B(F) = \dim \overline{B} = \dim \overline{A} = \dim_A(F) \ .$$

□

PROPOZIŢIE 4.17. *Fie $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ un morfism local între inele locale noetheriene, E un A-modul de tip finit şi F un B-modul finit generat. Atunci*

$$\dim_B(E \otimes_A F) \leq \dim_A(E) + \dim_{B \otimes_A K}(F \otimes_A K) \ .$$

În particular, $\dim B \leq \dim A + \dim\,(B \otimes_A K)$.

DEMONSTRAŢIE. Demonstrăm mai întâi cazul particular $E = A$, $F = B$.

Considerăm $a_1, \ldots, a_s \in M$ un sistem de parametri ai lui A. Idealul I generat în A de aceste elemente este M-primar, prin urmare $\text{Rad}_B(IB) = \text{Rad}_B(MB)$. Aşadar,

$$\dim_B(B/IB) = \dim_B(B/MB) = \dim_B(B \otimes_A K) \ ,$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

întrucât $B/MB \simeq B \otimes_A K$ şi dimensiunea unui inel coincide cu dimensiunea redusului său, obţinut prin factorizarea radicalului lui zero.

Pe de altă parte, din lema 4.6 se cunoaşte relaţia $s(B) \leq s(A) + s(B/IB)$. Folosind teorema Krull-Chevalley-Samuel, se obţine

$$\dim B \leq \dim A + \dim(B \otimes_A K) .$$

Trecem la demonstrarea cazului general. Din $\mathrm{Ann}_B(E \otimes_A F) \supseteq \mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B$ rezultă

$$\dim_B(E \otimes_A F) \leq \dim_B B/(\mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B) . \tag{16}$$

Conform propoziţiei precedente

$$\dim_{B\otimes_A K}(F \otimes_A K) = \dim_B(F \otimes_A K) ,$$

iar prin definiţie

$$\dim_A(E) = \dim_A(A/\mathrm{Ann}_A(E)) .$$

Cum $F \otimes_A K \simeq F \otimes_B (B \otimes_A K)$, iar F şi $B \otimes_A K$ sunt B-module finit generate, avem

$$\begin{aligned} \mathrm{Supp}_B(F \otimes_A K) &= \mathrm{Supp}_B(F) \cap \mathrm{Supp}_B(B \otimes_A K) = \\ &= \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F)) \cap \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(B \otimes_A K)) = \\ &= \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F)) \cap \mathrm{V}(MB) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F) + MB) \\ &= \mathrm{Supp}_B(B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)) . \end{aligned}$$

Două module finit generate cu acelaşi suport au aceeaşi dimensiune, astfel că

$$\dim_B(F \otimes_A K) = \dim_B(B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)) . \tag{17}$$

Acum se aplică relaţia demonstrată în cazul anterior inelelor

$$\overline{A} := A/\mathrm{Ann}_A(E) \text{ şi } \overline{B} := B/(\mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B) ,$$

observând că fibra lui $\overline{B}$ în idealul maximal $M\overline{A}$ este tocmai $B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)$. □

COROLAR 4.18. *Dacă pe lângă ipotezele propoziţiei anterioare presupunem că MB este ideal N-primar, atunci* $\dim B \leq \dim A$. *Dacă în plus A este domeniu de integritate, iar* $\dim B = \dim A$, *atunci u este morfism injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Prima afirmaţie rezultă din faptul că în aceste condiţii MB este ideal de definiţie pentru B.

Şirul de inegalităţi

$$\dim B \leq \dim A/\ker u \leq \dim A$$

arată că nucleul morfismului u este inclus într-un ideal prim minimal al lui A dacă $\dim B = \dim A$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 4.19. *Dacă* $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ *este un morfism plat şi local între inele locale noetheriene, atunci*

$$\dim B = \dim A + \dim(B \otimes_A K) \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $P \in \operatorname{Spec} A$ şi $Q \in \operatorname{Spec} B$ un divizor prim al lui PB (*i.e.* $Q \in \operatorname{Ass}_B(B/PB)$). Vom arăta $Q \cap A = P$, ceea ce implică faptul că extinderea $A \subseteq B$ are proprietatea LO. Deoarece B/PB este A/P-modul plat, putem presupune $P = 0$. Atunci orice element al lui Q este divizor al lui zero în B, iar elementele lui A nu sunt divizori ai lui zero în B, întrucât B este A-modul plat. Prin urmare, $Q \cap A = 0$.

Demonstraţia se termină aplicând rezultatul următor. □

PROPOZIŢIE 4.20. *Fie* $u : (A, M, K) \longrightarrow B$ *un morfism de inele noetheriene, cu* MB *conţinut în radicalul Jacobson al lui* B. *Dacă pentru orice ideal prim nemaximal* P *al lui* A *şi orice* $Q \in \operatorname{Min}_B(B/PB)$ *avem* $Q \cap A \neq M$, *atunci*

$$\dim B = \dim A + \dim(B \otimes_A K) \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Se raţionează prin inducţie după $d := \dim A$. Dacă $d = 0$, atunci A este inel artinian şi singurul său ideal prim, M, este nilpotent. Prin urmare MB este ideal nilpotent şi deci $\dim B = \dim B/MB$.

Fie $d \geq 1$ şi $Q_1, \ldots, Q_s$ idealele prime minimale ale lui B. Ipoteza asigură că preimaginile lor $u^{-1}(Q_1), \ldots, u^{-1}(Q_s)$ sunt diferite de M. Cu lema de evitare se găseşte $a \in M \setminus (\operatorname{Min} A \bigcup (u^{-1}(Q_1) \cup \ldots \cup u^{-1}(Q_s)))$. Din corolarul 4.8 rezultă

$$\dim (A/aA) = \dim A - 1 \ , \ \dim (B/aB) = \dim B - 1 \ .$$

Apoi se constată că morfismul indus $\overline{A} := A/aA \longrightarrow \overline{B} := B/aB$ îndeplineşte aceleaşi condiţii ca şi u, deci se poate aplica ipoteza de recurenţă pentru această situaţie. Rămâne să se observe că $B \otimes_A K$ este izomorf cu $\overline{B} \otimes_{\overline{A}} K$. □

Continuăm studierea comportării dimensiunii la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

PROPOZIŢIE 4.21. *Fie* (A, M, K) *un inel local, noetherian, de dimensiune* d *şi* $a_1, \ldots, a_t \in M$. *Atunci* $a_1, \ldots, a_t$ *fac parte dintr-un sistem de parametri ai lui* A *dacă şi numai dacă* $\dim(A/(a_1, \ldots, a_t)A) = d - t$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $B := A/(a_1, \ldots, a_t)A$, $N := M/(a_1, \ldots, a_t)M$. Să presupunem că $a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_d$ este un sistem de parametri ai lui A. Atunci clasele lui $a_{t+1}, \ldots, a_d$ în B generează un ideal N-primar, prin urmare $d - t \geq \dim B$. Fie acum $b_1, \ldots, b_s$ un sistem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

de parametri ai lui B, în particular generatori ai unui ideal N-primar, care conţine o putere a lui N. Preimaginile lor în A împreună cu a_1, ..., a_t generează un ideal care conţine o putere a lui M, deci este ideal M-primar. Aceasta înseamnă că $s + t \geq \dim A$.

Reciproc, fie $c_1, \ldots, c_{d-t} \in M$ ale căror clase în B generează un ideal N-primar. Ca mai sus se ajunge la concluzia că $(c_1, \ldots, c_{d-t}, a_1, \ldots, a_t)A$ este ideal M-primar. Acest ideal fiind generat de $d = \dim A$ elemente, înseamnă că c_1, ..., c_{d-t}, a_1, ..., a_t este un sistem de parametri ai lui A. □

COROLAR 4.22. *Dacă $a \in M$ este un nondivizor al lui zero în inelul local noetherian (A, M, K), atunci* $\dim (A/aA) = \dim A - 1$. *În particular, a face parte dintr-un sistem de parametri.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice divizor prim minimal P al idealului aA avem ht $P = 1$ conform corolarului 4.12. Alegem $P \in \mathrm{Min}\,(A/aA)$ astfel încât $\dim (A/aA) = \dim (A/P)$. Atunci

$$\dim A - 1 \leq \dim (A/aA) = \dim (A/P) \leq \dim A - \mathrm{ht}\, P = \dim A - 1\ .$$

□

Pentru a putea găsi dimensiunea unui inel de polinoame, vom demonstra în prealabil câteva rezultate ce prezintă interes în sine. Pentru orice ideal $I \leq A$ notăm cu $I^* := IA[X]$ extinsul său, iar cu $I^{**} := I^* + XA[X]$ idealul inelului de polinoame generat de nedeterminată şi de idealul considerat. Se observă că extinsul oricărui $P \in \mathrm{Spec}\, A$ este ideal prim întrucât $A[X]/P^* \simeq (A/P)[X]$ şi orice inel de polinoame cu coeficienţi într-un domeniu de integritate este încă inel integru. De asemenea, P^{**} este ideal prim deoarece $A[X]/P^{**} \simeq A/P$. În plus $P^{**} \cap A = P = P^* \cap A$.

LEMA 4.23. *Fie $A[X]$ inelul de polinoame într-o nedeterminată peste un inel noetherian A. Pentru orice ideal $I \leq A$ avem*

$$\mathrm{ht}\,(IA[X]) = \mathrm{ht}\,(I)\ ,\ \mathrm{ht}\,\big((I, X)A[X]\big) = \mathrm{ht}\,(I) + 1\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Cum $A[X]$ este A-modul plat, fiind liber, rezultă că morfismul $A \longrightarrow A[X]$ are proprietăţile LO şi GD (*cf.* demonstraţia corolarului 4.19). De aici rezultă uşor că dacă P este un divizor prim minimal al lui I, atunci P^* este un divizor prim minimal al lui I^*, iar P^{**} este un divizor prim minimal al lui I^{**}. Reciproc, dacă Q este un divizor prim minimal al lui I^*, resp. I^{**}, atunci $P := Q \cap A$ este un divizor prim minimal al lui I şi $Q = P^*$, resp. $Q = P^{**}$. Conchidem că este suficient să demonstrăm lema pentru $I = P$ ideal prim.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru orice lanţ strict ascendent $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_t$ de ideale prime din A, extensiile formează un lanţ ascendent $P_0^* \subset P_1^* \subset \ldots \subset P_t^*$ fără repetiţii (deoarece $P_i^* \cap A = P_i$). De aici decurge relaţia ht $P^* \geq$ $\geq$ht P. Evident P^* este conţinut strict în P^{**}, deci ht $P^{**} \geq$ ht $(P^*)+1$. Întrucât X este nondivizor al lui zero în $A[X]_{P^{**}}$, din corolarul 4.22 rezultă ht $(P^{**}) = \dim A[X]_{P^{**}} = \dim (A[X]_{P^{**}}/(X))+1 = \dim A_P+1$ $=$ ht $P+1$. Prin urmare ht $P^* \leq$ ht P, ceea ce încheie demonstraţia. □

Lema 4.24. *Fie $A[X]$ inelul de polinoame într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un inel comutativ A şi $P \in$ Spec A. Dacă Q_1, Q_2, $Q_3 \in$ Spec $A[X]$ au proprietăţile $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3$ şi $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A =$ $= Q_3 \cap A = P$, atunci $Q_1 = Q_2$ sau $Q_2 = Q_3$.*

Demonstraţie. Idealele prime din $A[X]$ care se contractă la un ideal prim P din A fixat sunt exact acele $Q \in$ Spec $A[X]$ care conţin P^* şi au proprietatea că preimaginea idealului Q/P^* prin compunerea morfismelor canonice

$$A/P \longrightarrow (A/P)[X] \simeq A[X]/P^*$$

este idealul nul din A/P.

Dar pentru un domeniu de integritate D de corp de fracţii K există o corespondenţă bijectivă între Spec $K[X]$ şi mulţimea

$$\{Q \in \text{Spec } D[X] \,:\, Q\cap(D\backslash\{0\}) = \emptyset\} = \{Q \in \text{Spec } D[X] \,:\, Q\cap D = 0\}\,.$$

Inelul de polinoame într-o variabilă cu coeficienţi într-un corp fiind inel principal, rezultă că orice ideal prim nenul din $K[X]$ este maximal. Aceasta înseamnă că în $A[X]$ nu există lanţuri de lungime cel puţin doi formate din ideale prime cu aceeaşi urmă pe A. □

Teorema 4.25. *Fie X o nedeterminată peste un inel noetherian A. Atunci* $\dim A[X] = \dim A + 1$.

Demonstraţie. Din lema 4.23 rezultă $\dim A[X] \geq \dim A + 1$, astfel că demonstraţia s-a încheiat pentru un inel A de dimensiune infinită.

Din lema 4.24 se deduce $\dim A[X] \leq 2\dim A + 1$, deci inelul de polinoame are dimensiunea finită simultan cu inelul de coeficienţi. Fie $n := \dim A[X]$ şi $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_n$ un lanţ de ideale prime din $A[X]$. Notăm $P_i := Q_i \cap A$, $i = 0, \ldots, n$ şi $j := \max\{\, i \,:\, P_i = P_{i+1} \,\}$. Folosind din nou lema 4.24, rezultă $Q_j = P_j^*$, iar lema 4.23 implică $j =$ ht $Q_j =$ ht P_j. De aici obţinem

$$\dim A \geq \text{ht}\, P_j+\dim(A/P_j) \geq \text{ht}\, Q_j+(n-j-1) = n-1 = \dim A[X]-1\,.$$

□

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 4.26. *Dacă A este inel noetherian, atunci*

$$\dim A[X_1, \dots, X_n] = \dim A + n .$$

În particular, dimensiunea unui inel de polinoame cu coeficienţi într-un corp coincide cu numărul nedeterminatelor.

Încheiem secţiunea cu un exemplu de domeniu noetherian în care nu toate lanţurile maximale de ideale prime au aceeaşi lungime.

EXEMPLU. Fie K un corp şi $A := K[[X]][Y]$ inelul de polinoame în Y cu coeficienţi în inelul seriilor formale în X peste K. Idealele $M := (X, Y)A$ şi $N := (XY - 1)A$ sunt maximale în A şi au înălţimea $\mathrm{ht}\ M = 2$, $\mathrm{ht}\ N = 1$.

Într-adevăr, izomorfismul evident $A/M \simeq K$ arată că M este ideal maximal, iar $0 \subset YA \subset M$ este un lanţ saturat de ideale prime. Pe de altă parte $K[[X]]$ este domeniu local de dimensiune unu, iar X generează unicul său ideal maximal. Din corolarul 4.11 rezultă că $A/N \simeq K[[X]]_X$ este corp, încât $N \in \mathrm{Max}\ A$. Înălţimea lui N este unu pentru că $XY - 1$ este nondivizor al lui zero şi se poate aplica corolarul 4.12.

EXERCIŢII.

1. Fie P un ideal prim de înălţime n într-un inel noetherian A. Atunci există $a_1, \dots, a_n \in A$ astfel încât :
   a) P este ideal prim minimal peste $(a_1, \dots, a_n)A$,
   b) orice ideal prim minimal peste $(a_1, \dots, a_k)A$, $1 \le k \le n$, are înălţimea k.

2. Fie K un corp, $A := K[X, Y, Z]/(XY, XZ) = K[x, y, z]$ şi $P := (y, z)A$.
   a) Să se arate că P este ideal prim.
   b) Să se calculeze $\mathrm{ht}\ P$ şi $\dim A$.

3. a) Să se arate că un ideal prim din $\mathbb{Z}[X]$ este generat fie de un număr natural prim, fie de un polinom neconstant şi ireductibil, fie de $p \in \mathbb{Z}$ număr prim şi $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$ a cărui imagine în inelul $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ este polinom ireductibil.

   b) Să se identifice idealele maximale ale inelului $\mathbb{Z}[X]$ printre idealele prime descrise la punctul a).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CAPITOLUL 3

Module Cohen-Macaulay

Lipsită de suportul intuitiv pe care îl află regularitatea în geometrie, proprietatea Cohen-Macaulay (ca şi platitudinea, de altfel) rămâne misterioasă pentru cei ce nu aderă la punctul de vedere strict pragmatic. Este un fapt constatat în repetate ocazii că proprietatea Cohen-Macaulay este extrem de folositoare din punct de vedere tehnic. În formularea lui M. Hochster „viaţa merită a fi trăită într-o lume Cohen-Macaulay". Definiţia pe care o adoptăm în această expunere este în ultimă instanţă o manifestare a principiului extremal: proprietatea apare când se realizează egalitatea dintre profunzime şi dimensiune. D. Mumford consideră „profunzimea [unui inel local A pe o varietate] ca o măsură a complexităţii topologice a singularităţii în punctul închis al lui Spec A: dacă profunzimea este maximă (*i.e.* egală cu dimensiunea lui A), atunci inelul este într-un sens slab nesingular, dar dacă profunzimea este mult mai mică decât dimensiunea, singularitatea este foarte proastă".

1. Şiruri regulate

În raţionamente geometrice inductive se reduce dimensiunea problemei prin proiectarea configuraţiei pe spaţii convenabil alese. În algebră există o tehnică asemănătoare—trecerea la module factor. Conceptul de şir regulat este derivat în această manieră din noţiunea de nondivizor al lui zero.

Pentru început, A va fi un inel comutativ şi E un A-modul nenul.

DEFINIŢIE 1.1. O familie finită $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, de elemente din A se numeşte *E-şir* sau *şir E-regulat* sau *A-şir pe E* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1) $E \neq \sum_{i=1}^{n} a_i E$,

2) pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, a_i este nondivizor al lui zero pe $E_i := E/\sum_{j=1}^{i-1} a_j E$.

Şirurile A-regulate se numesc simplu *şiruri*.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Condiţia 1) asigură că A-modulele E_i, $i = 1, \ldots, n$, sunt nenule. Condiţia 2) este echivalentă cu injectivitatea omotetiei definite de a_i pe E_i pentru orice indice i cuprins între 1 şi n. Alte proprietăţi simple sunt consemnate în lema următoare:

LEMA 1.2. *Dacă $a_1, \ldots, a_n$ este un A-şir pe E, atunci:*

1. Pentru orice numere naturale $e_1, \ldots, e_n \geq 1$, şirul $a_1^{e_1}, \ldots, a_n^{e_n}$ este E-regulat.

2. Dacă E este un A-modul finit generat, $I := \sum_{i=1}^{n} a_i E$ şi $P \in \operatorname{Supp} E \cap V(I)$, atunci $a_1, \ldots, a_n$ este un E_P-şir.

Următoarea caracterizare a şirurilor regulate permite ca în multe raţionamente inductive să putem presupune că lungimea şirului regulat este 1 sau 2.

PROPOZIŢIE 1.3. *Pentru $a_1, \ldots, a_n \in A$, $E \in A$-mod şi $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $a_1, \ldots, a_n$ este E-şir,

(ii) $a_1, \ldots, a_r$ este A-şir pe E şi $a_{r+1}, \ldots, a_n$ este A-şir pe E_{r+1}.

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Prin omiterea ultimului element dintr-un E-şir, celelalte formează încă şir E-regulat. A doua parte a condiţiei (ii) rezultă folosind izomorfismul canonic existent între E_t şi $E_i / \sum_{j=i}^{t-1} a_j E$ pentru $t \in \mathbb{N}$, $i < t \leq n$.

Reciproca se demonstrează asemănător. $\square$

PROPOZIŢIE 1.4. *Fie E un A-modul nenul, $a_1, \ldots, a_n$ un A-şir pe E şi S un sistem multiplicativ închis care nu conţine 0. Dacă $(a_1/1, \ldots, a_n/1)S^{-1}E \neq S^{-1}E$, atunci $a_1/1, \ldots, a_n/1$ formează un $S^{-1}A$-şir pe $S^{-1}E$.*

DEMONSTRAŢIE. Revine la a arăta că dacă a este nodivizor al lui zero pe E şi $aS^{-1}E \neq S^{-1}E$, atunci $a/1 \notin Z(S^{-1}E)$. Prin localizarea şirului exact

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{a} E \longrightarrow E/aE \longrightarrow 0 \tag{18}$$

se obţine şirul exact $0 \longrightarrow S^{-1}E \xrightarrow{a/1} S^{-1}E \longrightarrow S^{-1}E/aS^{-1}E \longrightarrow 0$, ceea ce arată că $a/1$ este nondivizor al lui zero pe $S^{-1}E$. $\square$

PROPOZIŢIE 1.5. *Fie A un inel şi E, F două A-module. Dacă F este A-modul plat, atunci orice şir E-regulat este $E \otimes_A F$-regulat. Dacă F este fidel plat, orice şir $E \otimes_A F$-regulat este E-regulat.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice elemente $a_1, \ldots, a_n$ din A există un izomorfism canonic

$$E \otimes_A F / \sum_{i=1}^{n} a_i (E \otimes_A F) \simeq \big(E / \sum_{i=1}^{n} a_i E\big) \otimes_A F \, .$$

Dacă F este modul plat, prin tensorizarea şirului exact (18) cu F se obţine şirul exact

$$0 \longrightarrow E \otimes_A F \xrightarrow{a} E \otimes_A F \longrightarrow (E/aE) \otimes_A F \longrightarrow 0 \, . \tag{19}$$

Rezultă că a este nondivizor al lui zero pe A-modulul $E \otimes_A F$.

Reciproc, dacă a este nondivizor al lui zero pe $E \otimes_A F$, atunci şirul (19) este exact. Prin urmare, dacă F este fidel plat, şirul (18) este exact. □

Exemplul cel mai la îndemână de şir regulat este dat de variabilele unui inel de polinoame: $X_1, \ldots, X_n$ este A-şir pe $A[X_1, \ldots, X_n]$. Cum vom vedea, acest exemplu este generic în sensul că în anumite condiţii, graduatul unui modul E în raport cu idealul I generat de un A-şir pe E este izomorf cu inelul de polinoame cu coeficienţi în A/I şi având atâtea nedeterminate cât este lungimea E-şirului. Totuşi, analogia cu variabilele unui inel de polinoame nu trebuie urmată fără precauţii. De pildă, ordinea elementelor unui şir regulat este esenţială, cum ne convinge următorul

EXEMPLU. În inelul de polinoame $A := K[X, Y, Z]$ cu coeficienţi într-un corp K se consideră elementele $a_1 := X$, $a_2 := Y(1-X)$, $a_3 := Z(1-X)$. Atunci a_1, a_2, a_3 şi a_2, a_1, a_3 sunt şiruri regulate, dar a_2, a_3 nu este A-şir.

Într-un domeniu de integritate, orice element nenul este regulat, deci a_1 şi a_2 sunt A-şiruri de lungime 1. Fie f, $g \in A$ astfel încât $a_1 f + a_2 g = 0$, adică $Xf = -Y(1-X)g$. Datorită unicităţii descompunerii în factori primi, cum X şi $1-X$ sunt coprime, rezultă că X divide g. Aşadar, a_1, a_2 este A- şir. Să presupunem că f, g, $h \in A$ verifică o relaţie $a_1 f + a_2 g + a_3 h = 0$. Atunci $Xf + Y(1-X)g + Z(1-X)h = 0$, de unde rezultă $f = (1-X)p$, cu $p \in A$. Prin urmare $Xp + Yg + Zh = 0$. Înlocuind Z cu 0, se obţine $p(X, Y, 0) = Yr(X, Y)$ şi $g(X, Y, 0) = -Xr(X, Y)$, deci $p = Yr + Zs$, $g = -Xr + Zt$, unde s, $t \in A$. După înlocuire şi simplificare cu Z se ajunge la relaţia $Xs + Yt + h = 0$, care arată că a_3 este nondivizor al lui zero pe $A/(a_1, a_2)$. Conform propoziţiei 1.1, a_1, a_2, a_3 este A- şir.

Pe de altă parte, evident $Za_2 - Ya_3 = 0$ şi $Y \notin a_2 A$, astfel că a_2, a_3 nu este A-şir.

LEMA 1.6. *Dacă a, b este un A-şir pe E, atunci $a \notin Z(E/bE)$.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Fie $x \in E$ astfel încât $ax \in bE$, adică $ax = by$ pentru $y \in E$ convenabil. Din $b \notin \mathrm{Z}(E/aE)$ rezultă $y = az$ pentru un anumit element z din E. După simplificare în relaţia $a(x - bz) = 0$ cu nondivizorul lui zero a, se obţine $x = bz$. □

TEOREMA 1.7. *Fie A un inel noetherian, $a_1, \ldots, a_n$ elemente din radicalul Jacobson şi E un A-modul finit generat. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ este şir E-regulat, atunci orice permutare a elementelor $a_1, \ldots, a_n$ este un E-şir.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece orice permutare este produs de transpoziţii şi orice transpoziţie se poate obţine prin schimbări succesive de elemente vecine, este suficient să arătăm că $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n$ este E-şir pentru orice i, $1 \leq i \leq n$. (Aici folosim convenţia ca din indicii mai mari decât n se scade n.) Din propoziţia 1.3 şi lema 1.6 rezultă că proprietatea dorită este stabilită dacă dovedim că pentru orice elemente a, b din radicalul Jacobson care formează E-şir, b este nondivizor al lui zero pe E.

Fie $x \in \mathrm{Ann}_E(b)$. Cum $bx = 0$ şi $b \notin \mathrm{Z}(E/aE)$, există $y \in E$ astfel încât $x = ay$. Atunci $aby = 0$, deci $by = 0$ întrucât $a \notin \mathrm{Z}(E)$. Aşadar, $\mathrm{Ann}_E(b) = a\mathrm{Ann}_E(b)$. Din lema lui Nakayama conchidem că $\mathrm{Ann}_E(b) = 0$, adică $b \notin \mathrm{Z}(E)$. □

Fie E un modul de tip finit peste un inel noetherian A şi $I \leq A$ cu $IE \neq E$. Pentru orice E-şir $a_1, \ldots, a_n$, lanţul de submodule

$$a_1E \subset a_1E + a_2E \subset \ldots \subset \sum_{i=1}^{n} a_iE$$

este strict ascendent. Pentru E modul noetherian, orice E-şir conţinut în I poate fi prelungit la un şir E-regulat maximal $a_1, \ldots, a_t$, $n \leq t$, adică orice $a \in I$ este divizor al lui zero pe $E/\sum_{i=1}^{t} a_iE$. M. Hochster [**11**] a construit şiruri maximale conţinute într-un acelaşi ideal şi de lungimi diferite. Acest fenomen nu se manifestă în module finit generate peste inele noetheriene.

TEOREMA 1.8. *Fie E un modul de tip finit peste un inel noetherian A şi I un ideal cu $IE \neq E$. Atunci orice două E-şiruri maximale conţinute în I au acelaşi număr de elemente.*

DEMONSTRAŢIE. Dintre E-şirurile maximale conţinute în I alegem unul a cărui lungime n e minimă şi raţionăm prin inducţie după n. Dacă $n = 0$, înseamnă că I constă numai din divizori ai lui zero pe E şi nu avem nimic de justificat. Fie $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n$ un E-şir maximal conţinut în I şi $b_1, \ldots, b_n$ un alt E-şir conţinut în I. Arătăm că I constă numai din divizori ai lui zero pe $E/(b_1, \ldots, b_n)E$. Pentru $n = 1$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$I \subsetneq Z(E/a_1E) = \cup\{ P : P \in \mathrm{Ass}(E/a_1E) \}$. Cum E este modul noetherian, are doar un număr finit de ideale prime asociate. Cu lema de evitare se conchide că I este conţinut într-un divizor prim al lui E/a_1E. Atunci $xI \subseteq a_1E$ pentru un anumit $x \in E \setminus a_1E$. În particular, $b_1x = a_1y$, cu $y \in E$. Observăm că $y \notin b_1E$ (altfel, după simplificare cu b_1, ar rezulta $x \in a_1E$), prin urmare $a_1Iy = b_1Ix \subseteq a_1b_1E$, ceea ce implică $Iy \subseteq b_1E$. Aşadar, I constă numai din divizori ai lui zero pe E/b_1E.

Pentru $n > 1$ notăm ca mai înainte $E_i := E/(a_1, \ldots, a_{i-1})E$ şi $F_i := E/(b_1, \ldots, b_{i-1})E$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Modificăm şirurile $a_1, \ldots, a_n$ şi $b_1, \ldots, b_n$ astfel încât să obţinem noi şiruri regulate având termeni în comun. Ca şi în cazul $n = 1$ se poate găsi $c \in I$ care nu este divizor al lui zero pe nici unul dintre modulele E_i şi F_i, $1 \leq i \leq n$. Folosind repetat lema 1.6, se deduce că $c, a_1, \ldots, a_{n-1}$ şi $c, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sunt E-şiruri din I. Din cazul $n = 1$ aplicat modulului E_n se obţine că $a_1, \ldots, a_{n-1}, c$ este E-şir maximal din I, încât $c, a_1, \ldots, a_{n-1}$ este E-şir maximal conţinut în I. Conform propoziţiei 1.3, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ şi $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sunt E/cE-şiruri, iar primul este chiar maximal. În virtutea ipotezei de inducţie, şi cel de al doilea E/cE-şir este maximal. Dar dacă $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$ este E-şir regulat maximal, atunci şi E-şirul $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ este maximal (datorită celor demonstrate în cazul $n = 1$). □

EXEMPLU. În inelul $A := K[[X]][Y]$, X, Y şi $1 - XY$ sunt şiruri regulate maximale. Acest exemplu arată că ipoteza $IE \neq E$ din teorema 1.2 este necesară.

Cum A este domeniu, X şi $1-XY$ sunt şiruri regulate. Inelul factor $B := A/(1 - XY) \simeq K[[X]]_X$ este izomorf cu localizatul inelului de serii formale $K[[X]]$ în sistemul multiplicativ închis format din puterile lui X. Clar B este corp, astfel că singurul ideal al lui A ce conţine strict $(1 - XY)A$ este A. Dar pentru acesta nu este îndeplinită prima condiţie cerută în definiţia şirului regulat.

Fie $Xf + Yg = 0$, cu $f, g \in A$. Atunci

$$f = \sum_{i=0}^{d+1} a_i Y^i \quad \text{şi} \quad g = \sum_{i=0}^{d} b_i Y^i ,$$

cu $a_i, b_j \in K[[X]]$ şi $a_{d+1} \neq 0 \neq b_d$. Relaţia

$$a_0 + \sum_{i=1}^{d+1} (a_i X + b_{i-1}) Y^i = 0$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

implică $a_0 = 0$ şi $b_{i-1} = -a_iX$ pentru $1 \le i \le d+1$, astfel că

$$g = -X\sum_{i=0}^{d} a_{i+1}Y^i \in XA\ .$$

Prin urmare X, Y este A-şir. Maximalitatea rezultă ca mai sus, folosind izomorfismul $A/(X,Y) \simeq K$.

DEFINIŢIE 1.9. În ipotezele teoremei 1.8, numărul elementelor dintr-un A-şir maximal pe E conţinut în I se numeşte *profunzimea lui E în I* sau *gradul lui I pe E* şi se notează $\mathrm{prof}_I(E)$ sau $\mathrm{depth}_I(E)$. Dacă A este inel local şi I este idealul său maximal, vom renunţa la a mai pune în evidenţă idealul şi spunem simplu „profunzimea modulului E".

Egalitatea $\mathrm{prof}_I(E) = 0$ are loc dacă şi numai dacă I constă numai din divizori ai lui zero pe E. În cazul unui inel local noetherian (A, M, K), relaţia $\mathrm{prof}_M(E) = 0$ este echivalentă cu $M \in \mathrm{Ass}\ E$.

Din teorema 1.8 decurge

COROLAR 1.10. *Fie I un ideal într-un inel noetherian şi E un A-modul finit generat. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ este un E-şir din I, atunci*

$$\mathrm{prof}_I(E/(a_1,\ldots,a_n)E) = \mathrm{prof}_I(E) - n\ .$$

În următorul rezultat se stabileşte o primă legătură între profunzimea şi numărul generatorilor unui modul.

PROPOZIŢIE 1.11. *Fie I un ideal al unui inel noetherian A şi E un A-modul de tip finit. Presupunem că I este generat de t elemente şi că* $\mathrm{prof}_I(E) = n$. *Atunci* $\mathrm{prof}_I(E) \le t$ *şi I poate fi generat de $a_1, \ldots, a_t$ astfel încât $a_1, \ldots, a_n$ este E-şir. În particular,* $\mathrm{prof}_I(E) = \mu(I)$ *dacă şi numai dacă I poate fi generat de un E-şir maximal.*

DEMONSTRAŢIE. Considerăm un sistem de generatori $a_1, \ldots, a_t$ pentru I, numerotat astfel încât primele k, $0 \le k \le t$, elemente sunt divizori ai lui zero pe E, iar toate celelalte sunt nondivizori ai lui zero pe E. În cazul $k = t$, $\mathrm{prof}_I(E) = 0$ şi nu avem nimic de demonstrat. Dacă însă $k < t$, vom arăta că există $b \in I$ nondivizor al lui zero pe E astfel încât $(a_1, \ldots, a_{k+1})A = (b, a_1, \ldots, a_k)A$. După trecerea la E/bE şi I/bA, concluzia propoziţiei de obţine prin inducţie după $\mathrm{prof}_I(E)$.

Fie $X := \{P_1, \ldots, P_s\}$ elementele maximale (faţă de incluziune) din Ass E. În conformitate cu alegerea lui k, există un element de forma $a + ca_{k+1}$ cu $a \in (a_1, \ldots a_k)A$, $c \in A$, care nu este conţinut în $\mathrm{Z}(E) = \cup\{P : P \in X\}$. Dacă a_{k+1} aparţine la exact r dintre idealele $P_1, \ldots, P_s$, atunci $r < s$ (altfel $a \in (a_1, \ldots, a_k)A \subseteq \mathrm{Z}(E)$) şi, după o eventuală renumerotare, putem presupune că acestea sunt $P_1, \ldots, P_r$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Alegem $d \in P_{r+1} \cap \ldots \cap P_s \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_r)$ şi punem $b := ad + a_{k+1}$. Acest element are proprietăţile dorite. $\square$

Se poate arăta că dacă în plus I este conţinut în radicalul inelului, din egalitatea $\mathrm{prof}_I(E) = \mu(I)$ rezultă că *orice* sistem minimal de generatatori ai lui I este E-şir.

La calcularea profunzimii unui modul într-un ideal, putem presupune că idealul este prim.

PROPOZIŢIE 1.12. *Dacă $IE \neq E$, există $P \in V(I)$ astfel încât* $\mathrm{prof}_I(E) = \mathrm{prof}_P(E)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $a_1, \ldots, a_n$ un A-şir maximal pe E conţinut în I. Cu lema de evitare rezultă că I este conţinut într-un ideal prim P asociat lui $E/(a_1, \ldots, a_n)E$. Vom arăta că $a_1, \ldots, a_n$ este un A-şir maximal pe E conţinut în P. Evident P constă doar din divizori ai lui zero pe modulul $E/(a_1, \ldots, a_n)E$. Mai trebuie să dovedim $PE \neq E$, ceea ce se poate face prin reducere la absurd.

Arătăm că din egalitatea $PE = E$ rezultă că anulatorul modulului E conţine un element de forma $1 + a$, cu $a \in P$. Pentru aceasta, considerăm un sistem finit de generatori $x_1, \ldots, x_t$ pentru A-modulul E. Atunci pentru orice i, $1 \leq i \leq t$, avem $x_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}x_j$ cu $a_{ij} \in P$. Rescriind aceste relaţii sub forma $\sum_{j=1}^{t}(\delta_{ij} - a_{ij})x_j = 0$, $1 \leq i \leq t$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, rezultă că $d := \det\,(\delta_{ij} - a_{ij}) \in$ $\in \mathrm{Ann}\, E$. Prin calcul direct se găseşte că acest determinant are forma $d = 1 + a$, cu $a \in P$. Pe de altă parte, relaţiile $1 + a \in \mathrm{Ann}\, E \subseteq P$ şi $a \in P$ conduc la contradicţia $1 \in P$. $\square$

PROPOZIŢIE 1.13. *Dacă un ideal I conţine un A-şir de lungime n, atunci $n \leq$* $\mathrm{ht}\, I$.

DEMONSTRAŢIE. Cum $\mathrm{ht}\, I = \inf\{\mathrm{ht}\, P \,:\, P \in V(I)\}$, putem presupune că I este ideal prim. Prin inducţie după n vom arăta că $\mathrm{ht}\, I \geq n$. Cazul iniţial $n = 0$ nu necesită nici o justificare. Fie $a_1, \ldots, a_n$ un A-şir maximal conţinut în I de lungime strict pozitivă. Notăm $B := A/a_1A$, $Q := I/a_1A$. Imaginile lui $a_2, \ldots, a_n$ în B formează un B-şir de lungime $n - 1$ conţinut în Q. Din ipoteza de inducţie rezultă $\mathrm{ht}\, Q \geq n - 1$. Cum a_1 este nondivizor al lui zero, el nu este conţinut în nici un ideal prim minimal al lui A. Aplicând rezultatul următor, conchidem că $\mathrm{ht}\, I \geq n$. $\square$

LEMA 1.14. *Fie P un ideal prim al unui inel A şi fie $a \in P$ un element care nu aparţine nici unui ideal prim minimal al lui A. Dacă $B := A/aA$, $Q := P/aA$ şi k este înălţimea lui Q în B, atunci* $\mathrm{ht}\, P \geq k + 1$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Cazul k infinit fiind evident, presupunem k finit şi considerăm un lanţ saturat de ideale prime în B: $Q_k \subset \ldots \subset Q_1 \subset \subset Q_0 = Q$. Preimaginile acestor ideale prin surjecţia canonică $A \longrightarrow B$ formează un lanţ de ideale prime în A: $P_k \subset \ldots \subset P_1 \subset P_0 = P$. Deoarece $a \in P_k$ şi prin ipoteză a nu aparţine nici unui ideal prim minimal din A, rezultă că există $P_{k+1} \in \operatorname{Spec} A$ conţinut strict în P_k. □

TEOREMA 1.15. *Dacă (A, M, K) este inel local noetherian şi E este un A-modul nenul de tip finit, atunci*

$$\operatorname{prof} E \leq \min\{ \dim(A/P) \ : \ P \in \operatorname{Ass}_A E \} \leq \dim E \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Inegalitatea din dreapta este consecinţă imediată a definiţiei

$$\begin{aligned} \dim E &= \sup\{ \dim(A/P) \ : \ P \in \operatorname{Ass}_A E \} = \\ &= \sup\{ \dim(A/P) \ : \ P \in \operatorname{Supp}_A E \} \ . \end{aligned}$$

Vom demonstra inegalitatea din stânga prin inducţie după $n := \operatorname{prof} E$. Întrucât cazul $n = 0$ este clar, vom presupune că M conţine un element a nondivizor al lui zero pe E şi că proprietatea este adevărată pentru modulele cu profunzimea $n - 1$.

Din corolarul 1.10 rezultă prof $(E/aE) = n - 1$, prin urmare

$$\operatorname{prof}(E/aE) \leq \min\{ \dim(A/Q) \ : \ Q \in \operatorname{Ass}(E/aE) \} \ .$$

Dacă arătăm că orice ideal prim P asociat lui E este conţinut strict într-un ideal prim Q asociat modulului E/aE, vom obţine

$$\min\{\dim(A/Q) : Q \in \operatorname{Ass}(E/aE)\} < \min\{\dim(A/P) : P \in \operatorname{Ass}(E/aE)\}$$

şi concluzia teoremei rezultă imediat.

Fie $P \in \operatorname{Ass} E$. Prin alegerea sa, $\operatorname{Ann}_E(P)$ este un submodul nenul al lui E conţinut în $F := (aE : P)_E$. Dacă arătăm relaţia $aE \subset F$, atunci E/aE are submodulul nenul $G := F/aE$ care este anulat de P. Pentru orice $Q \in \operatorname{Ass} G \subseteq \operatorname{Ass} E/aE$ avem $P \subseteq \operatorname{Ann} G \subseteq Q$ şi $P \neq Q$ deoarece $a \in Q \setminus P$.

Să presupunem că avem $aE = F = (aE : P)_E$. Atunci orice element $x \in \operatorname{Ann}_E(P)$ are o reprezentare $x = ay$, cu $y \in E$. Din $aPy = Px = 0$ rezultă $Py = 0$ pentru că a este nondivizor al lui zero pe E. Conchidem $\operatorname{Ann}_E(P) = a\operatorname{Ann}_E(P)$, iar lema lui Nakayama conduce la contradicţia $\operatorname{Ann}_E(P) = 0$. □

Ca mai întotdeauna, transformarea unei inegalităţi într-o egalitate are consecinţe remarcabile.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEFINIŢIE 1.16. Un modul E finit generat peste un inel local noetherian (A, M, K) este numit *modul Cohen-Macaulay* dacă E este nul sau dacă $E \neq 0$ şi $\mathrm{prof}_M(E) = \dim_A(E)$. Un modul E de tip finit peste un inel noetherian A este numit *modul Cohen-Macaulay* dacă E_M este A_M-modul Cohen-Macaulay pentru toate idealele maximale M ale lui A. Dacă A este A-modul Cohen-Macaulay, se spune că A este *inel Cohen-Macaulay.*

COROLAR 1.17. *În condiţiile teoremei 1.15, fie $a_1, \ldots, a_n$ un şir E-regulat din M. Atunci Eeste A-modul Cohen-Macaulay dacă şi numai dacă $E/(a_1, \ldots, a_n)E$ este $A/(a_1, \ldots, a_n)A$-modul Cohen-Macaulay. În particular, dacă $a_1, \ldots, a_n$ este un şir regulat conţinut în M, atunci A este inel Cohen-Macaulay dacă şi numai dacă $A/(a_1, \ldots, a_n)A$ este inel Cohen-Macaulay.*

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să stabilim afirmaţia în cazul $n = 1$. Din corolarul 1.10 se ştie că $\mathrm{prof}\ (E/a_1E) = \mathrm{prof}\ E - 1$, iar din corolarul II.4.8 se obţine $\dim E = \dim(E/a_1E)$. Altfel spus, un nondivizor al lui zero face parte dintr-un sistem de parametri ai lui E. □

COROLAR 1.18. *Pe lângă ipotezele din corolarul precedent, cerem ca E să fie modul Cohen-Macaulay. Atunci* $\dim A/P = \dim E - n$ *pentru orice* $P \in \mathrm{Ass}\ (E/(a_1, \ldots, a_n)E)$. *În particular, submodulul $(a_1, \ldots, a_n)E$ nu are componente primare scufundate.*

DEMONSTRAŢIE. Din corolarul 1.10, teorema 1.15 şi corolarul II.4.8 avem

$$\begin{aligned} \mathrm{prof}\, E - n &= \mathrm{prof}(E/(a_1, \ldots, a_n)E) \leq \\ &\leq \min\{\dim(A/P) : P \in \mathrm{Ass}(E/(a_1, \ldots, a_n)E)\} \leq \\ &\leq \max\{\dim(A/P) : P \in \mathrm{Ass}(E/(a_1, \ldots, a_n)E)\} = \\ &= \dim(E/(a_1, \ldots, a_n)E) = \dim E - n\ . \end{aligned}$$

Cum termenii extremi coincid, toate inegalităţile sunt de fapt egalităţi. □

COROLAR 1.19. *Fie (A, M, K) un inel Cohen-Macaulay şi $a_1, \ldots, a_n \in M$. Şirul $a_1, \ldots, a_n$ este regulat dacă şi numai dacă face parte dintr-un sistem de parametri ai lui A. În particular, sistemele de parametri pentru inelul local şi Cohen-Macaulay A coincid cu A-şirurile maximale conţinute în M.*

DEMONSTRAŢIE. Rezultatul precedent implică faptul că Ass A constă doar din idealele prime minimale din A. Prin urmare, pentru a

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

element arbitrar al lui M avem $\dim(A/aA) = \dim A - 1$ dacă şi numai dacă a este nondivizor al lui zero. Când aceste condiţii echivalente sunt îndeplinite, A/aA este inel Cohen-Macaulay conform corolarului 1.17. Demonstraţia se încheie raţionând prin inducţie după n şi folosind caracterizarea sistemelor de parametri dată în propoziţia I.4.21. □

EXEMPLE. 1. Orice modul finit generat de dimensiune 0 peste un inel noetherian este modul Cohen-Macaulay.

2. Orice inel noetherian redus de dimensiune 1 este inel Cohen-Macaulay. Într-adevăr, pentru $M \in \operatorname{Max} A$, inelul A_M este fie corp, fie unu-dimensional şi redus. În primul caz se foloseşte exemplul anterior. Să presupunem că $\dim A_M = 1$. Cum în orice inel redus, toate idealele asociate sunt minimale, rezultă $MA_M \notin \operatorname{Ass} A_M$. Prin urmare MA_M conţine un nondivizor al lui zero, deci $\operatorname{prof} A_M = 1 = \dim A_M$.

3. Inelul $A := K[X, Y]/(X^2, XY)$, cu K corp, nu este Cohen-Macaulay.

Egalitatea $(X^2, XY) = (X^2, Y) \cap (X)$ în care figurează idealul prim (X) şi idealul (X^2, Y) al cărui radical este maximal este o descompunere primară redusă pentru idealul din membrul stâng. Avem, aşadar, $\operatorname{Ass} A = \{ (x), (x, y) \}$ şi

$$\dim A = \max\{ \dim K[X, Y]/(X), \dim K[X, Y]/(X, Y) \} = 1 .$$

Idealul $M := (x, y)A$ este maximal şi $MA_M \in \operatorname{Ass} A_M$. Prin urmare $\operatorname{prof} A_M = 0$, în vreme ce $\dim A_M = 1$ pentru că şirul de ideale prime $xA_M \subset MA_M$ este maximal.

2. Inele Cohen-Macaulay

Rezultatul următor este considerat a fi punctul de plecare pentru teoria studiată în acest capitol. Demonstrat de Macaulay în 1916 pentru inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp, a fost extins de Cohen în 1946 pentru inele regulate.

TEOREMA 2.1. *(Teorema de nemixtare a lui Macaulay) Fie A un inel Cohen-Macaulay şi $I \leq A$ un ideal de înălţime n. Atunci:*

a) $\operatorname{prof}_I(A) = n$.

b) $\mu(I) = \operatorname{ht}(I)$ *dacă şi numai dacă I este generat de un A-şir. În acest caz toate idealele prime asociate lui I au aceeaşi înălţime. În particular, I nu are componente scufundate.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $a_1, \ldots, a_s$ un A-şir, $P \in \operatorname{Ass}(A/(a_1, \ldots, a_s)A)$ şi $M \in \operatorname{Max} A$ ce conţine P. Imaginile lui $a_1, \ldots, a_s$ în A_M formează un A_M-şir şi PA_M este prim asociat idealului generat de acestea în A_M. Conform corolarului 1.18 PA_M este ideal minimal peste $(a_1, \ldots, a_s)A_M$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

prin urmare $P \in \text{Min}\,(A/(a_1,\ldots,a_s)A)$. Cum înălţimea unui ideal generat de un şir regulat coincide cu lungimea şirului, am obţinut ultima afirmaţie din concluzia teoremei.

Dacă şirul regulat $a_1, \ldots, a_s$ este conţinut în I şi este maximal, atunci I constă doar din divizori ai lui zero pe A-modulul factor $A/(a_1,\ldots,a_s)A$, deci I este conţinut într-un ideal prim asociat acestui modul. Conform celor demonstrate în paragraful precedent, ht $P = s$. Din definiţia înălţimii rezultă ht $I = n \leq s =$ ht P. Pe de altă parte, dacă Q este un divizor prim minimal al lui I cu ht $Q =$ ht I, atunci $(a_1,\ldots,a_s)A \subseteq Q$, astfel că $n =$ ht $Q \geq$ ht $(a_1,\ldots,a_s)A = s$. S-a obţinut $n = s$, tocmai afirmaţia a).

Ştim deja din propoziţia 1.11 că orice ideal are un sistem minimal de generatori conţinând un şir regulat de lungime $\text{prof}_I(A)$. Aşadar, dacă $\mu(I) =$ ht (I), atunci I poate fi generat de un A-şir. □

COROLAR 2.2. *Dacă A este inel Cohen-Macaulay, atunci:*
a) A_P este inel Cohen-Macaulay pentru orice $P \in \text{Spec}\,A$;
b) orice localizat al lui A este inel Cohen-Macaulay;
c) pentru P, $Q \in \text{Spec}\,A$ cu $P \subset Q$ avem

$$\text{ht}\ Q = \text{ht}\ P + \dim(A_Q/PA_Q)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. a) Fie P un ideal prim de înălţime n. Atunci P conţine un A-şir de lungime n. Imaginea acestui şir în A_P este un A_P-şir regulat conţinut în idealul maximal al acestui inel local. Prin urmare, prof $(A_P) \geq \text{prof}_P(A) = \dim A_P$. Dar inegalitatea contrară are loc întotdeauna.

Afirmaţia b) rezultă din definiţia inelului Cohen-Macaulay, din proprietatea demonstrată la punctul a) şi din corespondenţa dintre idealele prime ale unui inel şi cele ale unui localizat al său. Pentru a demonstra c), considerăm $a_1, \ldots, a_n$ un A-şir de lungime $n =$ ht P conţinut în P. Atunci PA_Q este un divizor prim minimal al idealului $J := (a_1,\ldots,a_n)A_Q$ generat de un A_Q-şir. Prin urmare PA_Q este ideal prim asociat A_Q-modulului A_Q/J. Cum A_Q este inel Cohen-Macaulay, corolarul 1.18 asigură

$$\dim\,(A_Q/PA_Q) = \dim\,(A_Q) - n = \text{ht}\ Q - \text{ht}\ P\ .$$

□

COROLAR 2.3. *Dacă (A, M, K) este un inel local Cohen-Macaulay şi $I \neq A$ este un ideal, atunci* $\dim A = \dim\,(A/I) + \text{ht}\ I$.

DEMONSTRAŢIE. În aceste ipoteze $\dim A = \dim\,(A/P)$ pentru orice ideal prim minimal P al lui A, ceea ce înseamnă că toate lanţurile

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

saturate de ideale prime din A au aceeaşi lungime. Concluzia dorită rezultă acum din definiţiile dimensiunii şi înălţimii. □

Studiem acum stabilitatea proprietăţii Cohen-Macaulay la operaţiile uzuale.

PROPOZIŢIE 2.4. *Un inel A este Cohen-Macaulay dacă şi numai dacă inelul de polinoame $A[X]$ este Cohen-Macaulay.*

DEMONSTRAŢIE. Întrucât nedeterminata este un nondivizor al lui zero, dacă $A[X]$ este inel Cohen-Macaulay rezultă că A are aceeaşi proprietate conform corolarului 1.17.

Reciproc, fie $M \in \operatorname{Max} A[X]$ şi $P := M \cap A$. Cum idealul prim P^* este conţinut strict în M şi $n := \operatorname{ht} P = \operatorname{ht} P^* = \operatorname{ht} M - 1$, este suficient să arătăm $\operatorname{prof}_M(A[X]) \geq n+1$, căci va rezulta $\operatorname{prof}_M(A[X]) = \operatorname{ht} M$. Cum prin localizare profunzimea nu descreşte, în vreme ce dimensiunea nu creşte, vom conchide că $A[X]_M$ este inel Cohen-Macaulay. Întrucât această concluzie este valabilă pentru orice ideal maximal al lui $A[X]$, înseamnă că acest inel este Cohen-Macaulay.

Dacă $a_1, \ldots, a_n$ este un A-şir maximal conţinut în P, atunci rămâne şir regulat pe A-modulul liber $A[X]$. Prin urmare

$$\operatorname{prof}_M(A[X]/(a_1, \ldots, a_n)A[X]) = \operatorname{prof}_M(A[X]) - n\ .$$

Trecând la inelul cât

$$B := A[X]/(a_1, \ldots, a_n)A[X] \simeq \big(A/(a_1, \ldots, a_n)A\big)[X]\ ,$$

este suficient să arătăm că un ideal maximal dintr-un inel noetherian de polinoame într-o variabilă nu poate consta doar din divizori ai lui zero.

Să presupunem că $N \in \operatorname{Max} B$ şi $N \subseteq \mathrm{Z}(B)$. Atunci nedeterminata X, fiind nondivizor al lui zero, nu aparţine idealului N. Prin urmare $N + XB = B$ datorită maximalităţii idealului N, încât există $f \in N$ şi $g \in B$ astfel încât $f + Xg = 1$. Un polinom este divizor al lui zero dacă şi numai dacă este anulat de un element din inelul de coeficienţi, încât toţi coeficienţii săi sunt anulaţi de un divizor al lui zero. Cum termenul liber al polinomului $1 - Xg = f$ este inversabil, s-a ajuns la contradicţia $f \notin \mathrm{Z}(B)$. □

TEOREMA 2.5. *Pentru un inel local şi noetherian (A, M, K), următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A este inel Cohen-Macaulay,*
(*ii*) *există un sistem de parametri care este A-şir,*
(*iii*) *orice sistem de parametri este şir regulat.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Ştim deja că (i) implică (iii). Presupunem condiţia (ii) îndeplinită şi considerăm un sistem de parametri $a_1, \ldots, a_d$ care este A-şir. Atunci $\operatorname{ht} M = d \leq \operatorname{prof}_M(A)$. $\square$

TEOREMA 2.6. *Fie (A, M, K) un inel local, noetherian şi Cohen-Macaulay, iar $a_1, \ldots, a_n \in M$, $n \geq 1$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $a_1, \ldots, a_n$ *este A-şir,*
(ii) $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_r)A = r$ *pentru* $r = 1, \ldots, n$,
(iii) $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_n)A = n$,
(iv) $a_1, \ldots, a_n$ *face parte dintr-un sistem de parametri ai lui A.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a demonstra că (i) implică (ii), se observă că pentru orice r cuprins între 1 şi n, $a_1, \ldots, a_r$ este şir regulat, deci pentru idealul $I := (a_1, \ldots, a_r)A$ sunt îndeplinite relaţiile $r \leq \operatorname{prof}_I(A) \leq \mu(I) \leq r$. Cum A este inel Cohen-Macaulay, avem $\operatorname{prof}_I(A) = \operatorname{ht} I$.

Din teorema de nemixtare a lui Macaulay rezultă că (i) este consecinţă a condiţiei (iii). Implicaţia $(i) \Longrightarrow (iv)$ a fost deja demonstrată în corolarul 1.19, iar $(iv) \Longrightarrow (i)$ conform teoremei precedente. $\square$

DEFINIŢIE 2.7. Fie (A, M, K) un inel local noetherian şi Q un ideal M-primar. Atunci A/Q este A-modul de lungime finită. Mulţimea

$$\operatorname{Soc}(A/Q) := \operatorname{Ann}_{A/Q}(M) = (0 : M)_{A/Q}$$

este numită *soclul lui* A/Q.

Soclul lui A/Q este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită. Orice submodul nenul $U \leq A/Q$ are urma pe soclu nenulă deoarece U, fiind modul de lungime finită, conţine un element nenul anulat de M. Altfel spus, $\operatorname{Ass}_A(U) = \{ M \}$.

PROPOZIŢIE 2.8. *Fie (A, M, K) un inel local, noetherian şi Cohen-Macaulay, iar $a_1, \ldots, a_d$ un sistem de parametri ai lui A. Numărul*

$$r := \dim_K \operatorname{Soc}(A/(a_1, \ldots, a_d)A)$$

nu depinde de alegerea sistemului de parametri $a_1, \ldots, a_d$.

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după d. Cazul $d = 0$ este clar. Fie $d = 1$ şi $b \in M$ un nondivizor al lui zero. Atunci $a_1 b \notin Z(A)$ şi este suficient să arătăm

$$\dim_K \operatorname{Soc}(A/a_1bA) = \dim_K \operatorname{Soc}(A/a_1A) .$$

Dacă $c \in A \setminus a_1A$ şi $cM \subseteq a_1A$, atunci $cb \in A\setminus \subseteq a_1bA$ şi $cbM \subseteq a_1bA$. Rezultă că omotetia de raport b induce un morfism

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

injectiv $\phi : \mathrm{Soc}(A/a_1A) \longrightarrow \mathrm{Soc}(A/a_1bA)$. Arătăm că ϕ este izomorfism. Fie $x \in A$ cu $xM \subseteq a_1bA$. Cum apartenenţa $xa_1 \in a_1bA$ are loc doar pentru $x \in bA$, conchidem că ϕ este aplicaţie surjectivă.

Presupunem acum că $d > 1$ şi că propoziţia este valabilă pentru inele de dimensiune cel mult $d-1$. Dacă $b_1, \ldots, b_d$ este un alt sistem de parametri ai lui A, cu un raţionament folosit în demonstraţia teoremei 1.8 se găseşte $c \in M$ astfel ca $c, a_1, \ldots, a_{d-1}$ şi $c, b_1, \ldots, b_{d-1}$ să fie sisteme de parametri ai lui A. Cum $a_1, \ldots, a_{d-1}$ şi $b_1, \ldots, b_{d-1}$ induc sisteme de parametri ai inelului Cohen-Macaulay A/cA, din ipoteza de inducţie rezultă

$$\dim_K \mathrm{Soc}(A/(c, a_1, \ldots, a_{d-1})A) = \dim_K \mathrm{Soc}(A/(c, b_1, \ldots, b_{d-1})A) .$$

Se aplică apoi cele demonstrate în cazul $d = 1$ inelelor Cohen-Macaulay $A/(a_1, \ldots, a_{d-1})A$ şi $A/(b_1, \ldots, b_{d-1})A$ pentru a obţine

$$\dim_K \mathrm{Soc}(A/(c, a_1, \ldots, a_{d-1})A) = \dim_K \mathrm{Soc}(A/(a_1, \ldots, a_d)A)$$

şi

$$\dim_K \mathrm{Soc}(A/(c, b_1, \ldots, b_{d-1})A) = \dim_K \mathrm{Soc}(A/(b_1, \ldots, b_d)A) .$$

□

DEFINIŢIE 2.9. Numărul r din propoziţia 2.8 se numeşte *tipul* inelului local Cohen-Macaulay A. Un inel local Cohen-Macaulay de tip 1 se numeşte *inel Gorenstein*. Un inel noetherian A se numeşte *Gorenstein* dacă A_M este inel local Gorenstein pentru orice ideal maximal M al lui A.

LEMA 2.10. *Fie (A, M, K) un inel local noetherian şi Q un ideal M-primar. Idealul Q este ireductibil dacă şi numai dacă* $\dim_K \mathrm{Soc}(A/Q) = 1$.

DEMONSTRAŢIE. Idealul Q este ireductibil dacă şi numai dacă submodulul nul al lui A/Q este ireductibil. Modulul nul este reductibil dacă şi numai dacă există submodule nenule U şi V ale lui A/Q astfel încât $U \cap V = 0$. Am observat deja că U şi V au urme nenule pe soclul lui A/Q, deci dacă Q este reductibil, atunci $\dim_K \mathrm{Soc}(A/Q) \geq 2$. Reciproc, din $\dim_K \mathrm{Soc}(A/Q) \geq 2$ rezultă că există subspaţii vectoriale unu-dimensionale U şi V conţinute în $\mathrm{Soc}(A/Q)$ a căror intersecţie este nulă. Aceasta înseamnă că idealul Q este reductibil. □

Acum putem formula una din caracterizările găsite de Bass pentru inelele Gorenstein.

PROPOZIŢIE 2.11. *Un inel local şi Cohen-Macaulay (A, M, K) este Gorenstein dacă şi numai dacă există un sistem de parametri ai lui A ce generează un ideal ireductibil.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEFINIŢIE 2.12. Un inel local noetherian (A, M, K) este numit *intersecţie completă* dacă există un inel local regulat (R, N, K) şi un ideal $I \leq N$ astfel încât $\mu(I) = \operatorname{ht} I$ şi $A = R/I$. Un inel noetherian A este numit *local-intersecţie completă* dacă A_M este inel intersecţie completă pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$.

Se poate arăta că dacă inelul local noetherian (A, M, K) este intersecţie completă şi poate fi reprezentat sub forma $A = B/J$ cu B inel local regulat, atunci J este generat de un B-şir. Să observăm că orice inel local regulat este intersecţie completă, deci un inel regulat este local-intersecţie completă.

PROPOZIŢIE 2.13. *Dacă inelul local noetherian (A, M, K) este intersecţie completă, atunci este inel Gorenstein.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $A = R/I$ pentru un inel local regulat (R, N, K) şi I un ideal generat de un R-şir $r_1, \ldots, r_n$. Cum inelul R este Cohen-Macaulay, există un sistem de parametri ai lui R de forma $r_1, \ldots, r_n$, $b_1, \ldots, b_t$. Idealul maximal N al inelului regulat R fiind generat de un sistem de parametri ai lui R, din propoziţia 2.8 deducem

$$\dim_K \operatorname{Soc}(R/(r_1, \ldots, r_n, b_1, \ldots, b_t)R) = \dim_K \operatorname{Soc}(R/N) = 1 .$$

Imaginile $a_1, \ldots, a_t$ ale lui $b_1, \ldots, b_t$ în A formează un sistem de parametri ai acestui inel local, astfel că

$$\operatorname{Soc}(A/(a_1, \ldots, a_t)A) = \operatorname{Soc}(R/(r_1, \ldots, r_n, b_1, \ldots, b_t)R) .$$

□

Diagrama de mai jos sintetizează ierarhia inelelor noetheriene. Toate incluziunile sunt stricte. Un inel (nu neapărat domeniu de integritate) este numit *normal* dacă este întreg închis în inelul său total de fracţii.

$$\begin{array}{lcl}
\{\text{ corpuri }\} & & \\
\cap & & \\
\{\text{ domenii principale }\} & \subset & \{\text{ factoriale }\} \\
\cap & & \cap \\
\{\text{ regulate }\} & \subset & \{\text{ normale }\} \\
\cap & & \\
\{\text{ local-intersecţie completă }\} & & \\
\cap & & \\
\{\text{ Gorenstein }\} & & \\
\cap & & \\
\{\text{ Cohen-Macaulay }\} & & \\
\cap & & \\
\{\text{ noetheriene }\} & &
\end{array}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3. Inele regulate

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți elementare ale inelelor regulate. Rezultatele mai profunde necesită metode omologice pentru demonstrații.

LEMA 3.1. *Fie (A, M, K) un inel local noetherian, $a \in M \setminus M^2$ și $B := A/aA$. Atunci* $\operatorname{edim} B = \operatorname{edim} A - 1$.

DEMONSTRAȚIE. Notăm N extinsul idealului maximal M în B și k dimensiunea de scufundare edim B. Aceasta înseamnă că există elemente $a_1, \ldots, a_k \in M$ ale căror imagini în B generează N. Atunci $a, a_1, \ldots, a_k$ este un sistem de generatori ai idealului M. Vom arăta că imaginile acestor elemente în M/M^2 sunt K-liniar independente. Fie $x, y_1, \ldots, y_k \in A$ astfel încât $ax + a_1y_1 + \cdots + a_ky_k \in M^2$. Prin trecere la clase modulo aA se vede că din alegerea lui $a_1, \ldots, a_k$ rezultă că $y_1, \ldots, y_k \in M$. Prin urmare $ax \in M^2$ și cum $a \notin M^2$, iar M^2 este ideal M-primar, se conchide $x \in M$. □

PROPOZIȚIE 3.2. *Fie (A, M, K) un inel local noetherian, $a \notin M^2$ neinversabil și $B := A/aA$.*

a) Dacă A este inel regulat, atunci B este inel regulat.
b) Dacă a nu aparține nici unui ideal prim minimal, iar B este inel regulat, atunci A este inel regulat.

DEMONSTRAȚIE. Conform rezultatului consemnat în lema precedentă avem $\operatorname{edim} B = \operatorname{edim} A - 1$. Afirmația de la punctul *a*) rezultă din relațiile

$$\dim A - 1 \leq \dim B \leq \operatorname{edim} B = \dim A - 1 \ .$$

Reciproca parțială de la *b*) este consecința egalităților $\operatorname{edim} A - 1 = \operatorname{edim} B = \dim B = \dim A - 1$. □

LEMA 3.3. *Fie A un inel noetherian care nu este domeniu de integritate. Atunci orice ideal prim principal P conținut în radicalul Jacobson al lui A este ideal prim minimal.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $P = aA \in \operatorname{Spec} A$ și $Q \in \operatorname{Spec} A$ este conținut strict în P, atunci $Q \subseteq \cap\{ P^n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$. Într-adevăr, pentru orice $x \in Q$ avem $x = ay$, cu $y \in A$. Cum $a \notin Q$, înseamnă că $y \in Q \subseteq P$, prin urmare $x = a^2z$ cu $z \in A$, ș.a.m.d. Din lema de intersecție a lui Krull rezultă $\cap\{ P^n \ : \ n \in \mathbb{N} \} = 0$. Cum idealul nul nu este prim decât într-un domeniu de integritate, s-a ajuns la o contradicție. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PROPOZIŢIE 3.4. *Orice inel local regulat (A, M, K) este domeniu de integritate.*

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după $d = \dim A$. Dacă $d = 0$, idealul maximal este generat de mulţimea vidă, deci este nul, încât A este corp. Fie $d \geq 1$ şi $a \in M \setminus M^2$ (se poate găsi un astfel de element pentru că în caz contrar din lema lui Nakayama rezultă $M = 0$, *i.e.* $d = 0$). Inelul $B := A/aA$ este regulat de dimensiune $d - 1$ conform propoziţiei 3.2, deci este domeniu de integritate în virtutea ipotezei de inducţie. Atunci $P := aA$ este ideal prim. Dacă A nu ar fi integru, lema precedentă ar implica $P \in \operatorname{Min} A$. Atunci $M \setminus M^2 \subseteq \cup\{ Q : Q \in \in \operatorname{Min} A \}$ şi M ar fi inclus în reuniunea unui număr finit de ideale, dintre care doar M^2 nu este prim. Din lema de evitare a lui McCoy rezultă că M este conţinut într-un ideal prim minimal al inelului, în contradicţie cu ipoteza $\dim A \geq 1$. □

LEMA 3.5. *Fie A un inel noetherian cu proprietatea că orice ideal maximal al său conţine un singur ideal prim minimal. Atunci A este izomorf cu un produs direct finit de inele cu proprietatea că fiecare are unic ideal prim minimal.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\operatorname{Min} A = \{ P_1, \ldots, P_t \}$ şi $N = P_1 \cap \ldots \cap P_t$ nilradicalul lui A. Cum A este noetherian, există $s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $N^s = 0$, deci

$$\prod_{i=1}^{t} P_i^s \subseteq \Big(\bigcap_{i=1}^{t} P_i\Big)^s = N^s = 0 .$$

Din ipoteză rezultă că idealele prime minimale ale lui A sunt comaximale două câte două. Prin urmare, din lema chineză a resturilor se obţine

$$\bigcap_{i=1}^{t} P_i^s = \prod_{i=1}^{t} P_i^s \text{ şi } A = A/(P_1^s \cap \ldots P_t^s) \simeq \prod_{i=1}^{t} A/P_i^s .$$

Evident $\operatorname{Min} A/P_i^s = \{ P_i \}$ $(1 \leq i \leq t)$. □

COROLAR 3.6. *Fie A un inel noetherian cu proprietatea că A_M este domeniu de integritate pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$. Atunci A este produs direct finit de domenii de integritate. În particular, un inel regulat este produs direct finit de domenii de integritate.*

DEMONSTRAŢIE. Conform lemei precedente avem $A \simeq \prod_{i=1}^{t} A_i$, cu $\operatorname{Min} A_i = \{ P_i \}$, $i = 1, \ldots, t$. Din ipoteză A_M este redus pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$, astfel că A este redus. Atunci imaginea sa omomorfă A_i

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$(1 \leq i \leq t)$ este de asemenea inel redus. Dar nilradicalul lui A_i coincide cu P_i, astfel că $P_i = 0$, $i = 1, \ldots, t$. □

EXEMPLE. 1. Am observat în demonstraţia propoziţiei 3.4 că un inel local, regulat şi de dimensiune zero este corp.

2. Pentru un inel local, noetherian, unu-dimensional (A, M, K), următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(*i*) A este inel regulat,
(*ii*) M este ideal principal nenul,
(*iii*) A este inel de valuare discretă (*i.e.* domeniu principal cu un singur ideal prim nenul),
(*iv*) A este domeniu normal.

Sunt evidente implicaţiile $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ şi $(iii) \Longrightarrow (i)$. Vom arăta că din condiţia (iv) rezultă (iii).

Fie $E := (A : M)_Q$ transportorul lui M în A calculat în corpul de fracţii Q al lui A. Evident E conţine A. Observăm că incluziunea este strictă. Într-adevăr, deoarece M este unicul ideal prim nenul din inel, pentru orice element nenul a din M există $t \geq 1$ minimal cu proprietatea $M^t \subseteq aA$. Fie $b \in M^{t-1} \setminus aA$ şi $x := b/a \in Q$. Din $bM \subseteq M^t$ se conchide $x \in E \setminus A$. Din incluziunile $M \subseteq EM \subseteq A$ şi din faptul că EM este ideal în A rezultă $EM = A$ sau $EM = M$. Ultima egalitate nu este posibilă, deoarece implică $xM \subseteq M$, deci $x^n M \subseteq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel că $A[x] \subseteq A$. Aceasta înseamnă că x este întreg peste domeniul normal A, adică $x \in A$, contradicţie.

Prin urmare, are loc egalitatea $EM = A$. Arătăm că M/M^2 este K-spaţiu vectorial de dimensiune 1, ceea ce, împreună cu lema lui Nakayama, asigură că M este ideal principal. Fie I un ideal cuprins între M şi M^2. Atunci $M \subseteq IE \subseteq A$ şi cum IE este ideal în A, avem fie $A = IE$, de unde prin înmulţire cu M decurge $M = I$, fie $M = IE$, ceeea ce implică $I = M^2$.

3. Dacă (A, M, K) este inel regulat de dimensiune cel puţin 2 şi $a \in M^2$, $a \neq 0$, atunci inelul A/aA este intersecţie completă, dar nu este inel regulat.

LEMA 3.7. *Un inel noetherian A este redus dacă şi numai dacă pentru orice ideal prim P cu* $\operatorname{prof}(A_P) = 0$, *inelul A_P este regulat.*

DEMONSTRAŢIE. Observăm mai întâi că din propoziţiile I.3.45 şi 1.4 rezultă că un ideal prim P satisface condiţia $\operatorname{prof}(A_P) = 0$ dacă şi numai dacă este prim asociat lui A.

Toate idealele prime asociate unui inel redus sunt minimale, deci dacă A este redus, atunci egalitatea $\operatorname{prof}(A_P) = 0$ are loc dacă şi numai

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

dacă $P \in \operatorname{Min} A$. Pentru astfel de ideale prime A_P este inel artinian redus, deci corp.

Reciproc, fie N nilradicalul unui inel A cu proprietatea că pentru orice ideal prim P cu $\operatorname{prof}(A_P) = 0$, inelul A_P este regulat. Notăm $I := \operatorname{Ann} N$. Cum un inel local şi regulat este domeniu de integritate, pentru orice $P \in \operatorname{Ass} A$ nilradicalul lui A_P, care coincide cu NA_P, este idealul nul. Atunci $I \not\subseteq P$ şi prin urmare $I \not\subseteq \cup\{ P : P \in \operatorname{Ass} A \} = \mathrm{Z}(A)$, de unde se deduce $N = 0$. □

Un rezultat similar este valabil pentru dimensiunea unu:

TEOREMA 3.8. *(Criteriul de normalitate Krull-Serre) Un inel noetherian A coincide cu închiderea sa întreagă în inelul total de fracţii dacă şi numai dacă A_P este inel regulat pentru orice orice ideal prim P astfel ca* $\operatorname{prof}(A_P) \leq 1$.

DEMONSTRAŢIE. Se poate consulta [**4**, teorema 7.12]. □

Ultimele două rezultate menţionate pot fi reformulate în termeni de ecuaţii polinomiale. Un inel A este redus dacă şi numai dacă o ecuaţie de forma $X^n = 0$, $n \geq 1$, nu are soluţii în $A \setminus \{ 0 \}$. Condiţia ca un inel A să fie întreg închis în inelul total de fracţii $Q(A)$ înseamnă că orice ecuaţie de tipul $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$, cu $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n \in \mathbb{N}$, nu are soluţii în $Q(A) \setminus A$. În aceeaşi ordine de idei, ar fi interesant de văzut dacă există caracterizări de această formă pentru inelele noetheriene ale căror localizate în idealele prime P cu $\operatorname{prof}(A_P) \leq n$ sunt inele regulate, $n \geq 2$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CAPITOLUL 4

Metode omologice în studiul inelelor regulate

Acest capitol permite o superficială luare la cunoştinţă a unora dintre progresele posibile în algebra comutativă doar după însuşirea tehnicilor de algebră omologică.

1. Module proiective şi module injective

Modulele proiective corespund unor obiecte studiate în topologie. O teoremă a lui R. Swan afirmă echivalenţa noţiunilor de fibrat vectorial deasupra unui spaţiu topologic compact X şi de modul proiectiv peste inelul funcţiilor continue pe X cu valori reale. Modulele injective, aparent obţinute printr-o altă dualitate, permit caracterizări alternative pentru inelele Gorenstein definite în capitolul precedent.

Deocamdată A este un inel comutativ şi unitar, iar E un A-modul. Definiţiile şi rezultatele următoare sunt valabile şi în cazul necomutativ, dacă avem grijă să fim consecvenţi—de pildă, toate modulele să fie stângi.

DEFINIŢIE 1.1. E se numeşte modul *proiectiv* dacă pentru orice epimorfism de A-module $p : F \longrightarrow G$ şi pentru orice morfism $u : E \longrightarrow G$ există $f \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ astfel ca $u = pf$. E se numeşte *injectiv* dacă pentru orice monomorfism de A-module $i : F \longrightarrow G$ şi pentru orice morfism $v : F \longrightarrow E$ există $g \in \mathrm{Hom}_A(G, E)$ astfel ca $v = gi$.

LEMA 1.2. *Orice modul liber este proiectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o bază a modulului liber E şi $p : F \longrightarrow G$ este un epimorfism, pentru un morfism arbitrar $u : E \longrightarrow G$ alegem $f_\lambda \in p^{-1}(u(e_\lambda))$ pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$. Asocierea $e_\lambda \mapsto f_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, defineşte o funcţie $E \longrightarrow F$ care se extinde în mod unic (*cf.* proprietatea de universalitate a modulelor libere) la un morfism $f \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ cu proprietatea cerută în definiţia 1.1. $\square$

TEOREMA 1.3. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *E este un modul proiectiv,*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(*ii*) *pentru orice epimorfism* $p : F \longrightarrow G$, *morfismul indus*

$$\mathrm{Hom}_A(E,p) : \mathrm{Hom}_A(E,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E,G) \ , \ f \mapsto pf \ ,$$

este surjectiv,

(*iii*) *orice şir exact scurt de forma* $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0$ *este scindat,*

(*iv*) *există un modul* G *astfel încât* $E \oplus G$ *este modul liber.*

DEMONSTRAŢIE. Echivalenţa primelor două condiţii este clară. Să presupunem că E este modul proiectiv. Condiţia (*iii*) rezultă aplicând definiţia 1.1 pentru epimorfismul $G \longrightarrow E$ şi pentru morfismul identitate $E \longrightarrow E$. Dacă (*iii*) este adevărată, fie F un modul liber pentru care există un epimorfism $f : F \longrightarrow E$. Cum şirul exact $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$ este scindat, avem $F \simeq E \oplus \ker f$.

Să presupunem acum că pentru E este valabilă proprietatea (*iv*) şi să considerăm un epimorfism arbitrar $p : F \longrightarrow G$. Din lema anterioară ştim că pentru orice modul liber L, morfismul $\mathrm{Hom}_A(L,p)$ este surjectiv. Dacă în plus E este sumand direct al lui L, se obţine o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(L,F) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(L,p)"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L,G) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_A(E,F) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(E,p)"] & \mathrm{Hom}_A(E,G)
\end{tikzcd}$$

în care săgeţile verticale sunt morfisme surjective. Condiţia (*i*) rezultă din observaţia următoare. □

LEMA 1.4. *Fie* $f \in \mathrm{Hom}_A(F,G)$ *şi* $g \in \mathrm{Hom}_A(G,E)$.

a) Dacă f *şi* g *sunt epimorfisme, atunci* gf *este epimorfism.*

b) Dacă gf *este epimorfism, atunci* g *este de asemenea epimorfism.*

COROLAR 1.5. *a) Fie* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *o familie de module. Atunci* $\oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *este modul proiectiv dacă şi numai dacă* E_λ *este modul proiectiv pentru orice* $\lambda \in \Lambda$.

b) Un sumand direct al unui modul proiectiv este modul proiectiv.

DEMONSTRAŢIE. Afirmaţia *a*) rezultă din teorema 1.3 şi din asociativitatea şi comutativitatea sumei directe de module, iar *b*) este un caz particular al proprietăţii *a*). □

COROLAR 1.6. *Dacă* E *este un modul proiectiv de tip finit, există un modul finit generat* G *astfel încât* $E \oplus G$ *este modul liber. În particular,* E *este de prezentare finită.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Demonstraţie. Se consideră $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$ un şir exact în care F este modul liber de rang finit. Conform teoremei 1.3, avem $F \simeq E \oplus G$. De aici rezultă că G este finit generat pentru că este imagine omomorfă a unui modul de tip finit. În plus, din $E \simeq F/G$ rezultă că E este de prezentare finită. □

Dualitatea modul proiectiv-modul injectiv nu funcţionează foarte bine: chiar dacă rezultatele sunt analoage, demonstraţiile sunt de cele mai multe ori complet diferite şi mult mai dificile pentru modulele injective.

Teorema 1.7. *(Criteriul lui Baer) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *E este modul injectiv,*
(*ii*) *pentru orice modul G şi orice submodul F al său, orice morfism $v : F \longrightarrow E$ se poate extinde la G,*
(*iii*) *pentru orice ideal $I \leq A$ şi pentru orice $v \in \mathrm{Hom}_A(I, E)$, există o prelungire a lui v la A,*
(*iv*) *pentru orice ideal $I \leq A$ şi pentru orice $v \in \mathrm{Hom}_A(I, E)$, există $x \in E$ astfel încât $v(a) = ax$ pentru orice $a \in I$,*
(*v*) *orice şir exact scurt de forma $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ este scindat.*

Teorema 1.8. *(Eckmann-Schopf) Pentru orice modul E există un modul injectiv G şi un morfism esenţial $E \longrightarrow G$.*

Corolar 1.9. *a) Fie $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o familie de module. Atunci $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ este modul injectiv dacă şi numai dacă E_λ este modul injectiv pentru orice $\lambda \in \Lambda$.*

b) Un sumand direct al unui modul injectiv este modul injectiv.

Demonstraţie. Echivalenţa de la a) rezultă din definiţia modulului injectiv folosind proprietatea de universalitate a produsului direct. Ultima parte rezultă din prima ţinând cont că pentru o familie finită de module, suma directă este izomorfă cu produsul direct. □

Reamintim că un modul G este *divizibil* dacă pentru orice nondivizor al lui zero $a \in A$ şi pentru orice $x \in G$ există $y \in G$ astfel încât $x = ay$. Această proprietate este echivalentă cu faptul că orice morfism $aA \longrightarrow G$, unde $a \notin \mathrm{Z}(A)$, admite o prelungire $A \longrightarrow G$. Folosind această noţiune, se pot da exemple de module injective.

Exemple. 1. Orice modul injectiv este divizibil. Reciproca este valabilă dacă inelul este un domeniu cu ideale principale.

2. $\mathbb{Q}$ este un $\mathbb{Z}$-modul injectiv care nu este proiectiv.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dacă $\mathbb{Q}$ ar fi $\mathbb{Z}$-modul proiectiv, ar fi izomorf cu un sumand direct al unui modul liber, deci $\mathbb{Q}$ ar fi $\mathbb{Z}$-modul liber pentru că $\mathbb{Z}$ este inel principal. Evident $\mathbb{Q}$ nu este izomorf cu $\mathbb{Z}$, deci o bază a sa conţine cel puţin două elemente distincte $x = a/b$ şi $y = c/d$, cu a, b, c, $d \in \mathbb{Z}^*$. Relaţia de dependenţă liniară $cbx - ady = 0$ contrazice faptul că x şi y fac parte dintr-o bază a lui $\mathbb{Q}$.

3. Pentru orice număr natural $n > 1$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ este $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modul injectiv, dar nu este $\mathbb{Z}$-modul injectiv.

Idealele inelului $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sunt principale, generate de divizorii lui n. Se foloseşte criteriul lui Baer pentru a conchide că $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ este modul injectiv peste el însuşi. Grupul abelian subiacent inelului $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nu este divizibil (de pildă, nu există $y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ astfel încât $ny = 1$).

4. În inelul $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, idealul $3A$ este modul injectiv şi proiectiv (pentru că $A = 3A \oplus 2A$), dar nu este A-modul liber (anulatorul său fiind idealul nenul $2A$).

Rezultatul următor, cunoscut şi sub numele de lema serpentinei, se foloseşte în multe demonstraţii.

LEMA 1.10. *(Lema şarpelui) Fie o diagramă comutativă de A-module*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_3 & \xrightarrow{f_3} & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle v_3}\downarrow & & {\scriptstyle v_2}\downarrow & & {\scriptstyle v_1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G_3 & \xrightarrow{g_3} & G_2 & \xrightarrow{g_2} & G_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notăm $E_i :=$ ker v_i, $H_i :=$ coker v_i *($i = 1, 2, 3$) şi* $\overline{f}_i : E_i \longrightarrow E_{i-1}$, *resp.* $g_i' : H_i \longrightarrow H_{i-1}$, *morfismul indus de* f_i, *resp.* g_i, *($i = 2, 3$). Dacă liniile diagramei sunt exacte, există un morfism* $d : E_1 \longrightarrow H_3$ *astfel încât şirul*

$$0 \longrightarrow E_3 \xrightarrow{\overline{f}_3} E_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} E_1 \xrightarrow{d} H_3 \xrightarrow{g_3'} H_2 \xrightarrow{g_2'} H_1 \longrightarrow 0$$

este exact.

DEMONSTRAŢIE. *Construcţia lui d.* Pentru $x_1 \in E_1$ alegem $x_2 \in F_2$ astfel încât $f_2(x_2) = x_1$ şi notăm $y_2 := v_2(x_2)$. Din $g_2(y_2) = g_2(v_2(x_2)) = v_1(f_2(x_2)) = v_1(x_1) = 0$ rezultă existenţa unui element $y_3 \in G_3$ astfel ca $g_3(y_3) = y_2$. Se defineşte $d(x_1)$ ca fiind imaginea lui y_3 în H_3. Să arătăm că asocierea este bine definită. Dacă $x_2' \in F_2$ este un alt element din preimaginea lui x_1 prin f_2, atunci $x_2 - x_2' \in \ker f_2 = \operatorname{Im} f_3$, să spunem $x_2 - x_2' = f_3(x_3)$, cu $x_3 \in F_3$. Atunci $v_2(x_2) - v_2(x_2') = v_2(f_3(x_3)) = g_3(v_3(x_3))$, deci y_2 şi $v_2(x_2')$ au aceeaşi imagine în coker $v_3 = H_3$.

Din definiţia lui d se obţine uşor că este aplicaţie liniară.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Exactitatea în E_1. Dacă $d(x_1) = 0$, înseamnă că $y_3 \in \operatorname{Im} v_3$. Din $y_3 = v_3(x_3)$ cu $x_3 \in F_3$ obţinem $y_2 := g_3(y_3) = g_3(v_3(x_3)) = v_2(f_3(x_3))$. Cum $y_2 = v_2(x_2)$, avem $x_2 - f_3(x_3) \in E_2$ şi $f_2(x_2 - f_3(x_3)) = f_2(x_2) = x_1$, adică $x_1 \in \operatorname{Im} \overline{f}_2$. Aşadar, $\ker d \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}_2$. Incluziunea contrară este clară din definiţia lui d.

Exactitatea în H_3. Incluziunea $\operatorname{Im} d \subseteq \ker g_3'$ este consecinţa imediată a construcţiei lui d. Reciproc, fie $z_3 \in \ker g_3'$ şi $y_3 \in G_3$ un reprezentant al său. Atunci $g_3(y_3) \in \operatorname{Im} v_2$, să spunem $g_3(y_3) = v_2(x_2)$, cu $x_2 \in F_2$. Din relaţiile $0 = g_2(g_3(y_3)) = g_2(v_2(x_2)) = v_1(f_2(x_2))$ rezultă $x_1 := f_2(x_2) \in E_1$ şi apoi $d(x_1) = 0$ din definiţia lui d.

Exactitatea în celelalte module ale şirului din concluzia lemei este uşor de verificat. $\square$

În multe aplicaţii este important a distinge modulele proiective de cele libere. Această distincţie nu există în contextul în care ne plasăm de obicei.

PROPOZIŢIE 1.11. *Fie (A, M, K) un inel local (nu neapărat noetherian) şi E un A-modul de prezentare finită. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) E este modul liber,

(ii) există un şir exact de A-module $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{v} P \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0$ cu P modul proiectiv şi $\overline{v} := v \otimes_A K : Q/MQ \longrightarrow P/MP$ monomorfism.

DEMONSTRAŢIE. Dacă E este liber, se obţine o prezentare pentru care condiţia (ii) este îndeplinită luând $P = E$ şi $u = 1_E$. Reciproc, să presupunem condiţia (ii) îndeplinită pentru E. Considerăm o prezentare pentru E de forma $0 \longrightarrow G \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} E \longrightarrow 0$ cu F modul liber de rang finit, egal cu numărul minim de generatori pentru E, şi G modul finit generat (consecinţă a ipotezei E de prezentare finită). Din definiţia 1.1 rezultă existenţa unui morfism $h : P \longrightarrow F$ cu $u = fh$. Prin reducere modulo M se obţine o diagramă comutativă de K-spaţii vectoriale

$$\begin{tikzcd} P/MP \arrow[r, equal] \arrow[d, "\overline{h}"'] & P/MP \arrow[d, "\overline{u}"] \\ F/MF \arrow[r, "\overline{f}"] & E/ME \end{tikzcd}$$

Din modul în care a fost ales F rezultă injectivitatea morfismului indus $\overline{f} : F/MF \longrightarrow E/ME$ (fiind aplicaţie surjectivă între două spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune). Prin urmare $\overline{h} = \overline{f}^{-1}\overline{u}$ este de asemenea surjectiv. Lema lui Nakayama conduce la concluzia că

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

h este epimorfism. Este uşor de verificat că morfismul $q : Q \longrightarrow G$, $x \mapsto h(v(x))$, indus de h este încă surjectiv şi are nucleul izomorf cu $\ker h$. Se obţine o diagramă de A-module ale cărei linii şi coloane sunt exacte:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "1_E"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Prin reducere modulo idealul maximal M se obţine diagrama următoare de K-spaţii vectoriale:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & N/MN \arrow[r, equal] \arrow[d] & N/MN \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q/MQ \arrow[r] \arrow[d] & P/MP \arrow[r] \arrow[d] & E/ME \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & G/MG \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d] & F/MF \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & E/ME \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Linia din mijloc este exactă conform condiţiei (ii), linia de jos şi coloana din stânga sunt exacte datorită exactităţii la dreapta a produsului tensorial, iar coloana din mijloc este exactă pentru că se obţine tensorizând un şir exact scindat (se aplică lema 1.2 şi teorema 1.3). Se verifică apoi că $\overline{g} : G/MG \longrightarrow F/MF$ este monomorfism. Am stabilit deja că $\overline{f}$ este izomorfism, prin urmare $G/MG = 0$. Cum G este modul finit generat, din lema lui Nakayama rezultă $G = 0$. Aşadar, $E \simeq F$ este modul liber. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PROPOZIŢIE 1.12. *Un A-modul E de prezentare finită este proiectiv dacă şi numai dacă E_P este A_P-modul proiectiv pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$.*

DEMONSTRAŢIE. Evident, orice localizat al unui modul proiectiv este modul proiectiv peste inelul de fracţii. Reciproca rezultă din caracterizarea dată la punctul (ii) din teorema 1.3, din principiul local-global şi din lema următoare. □

LEMA 1.13. *Fie A un inel şi S un sistem multiplicativ închis din A. Dacă E şi G sunt două module astfel încât E este de tip finit (resp. de prezentare finită), atunci morfismul canonic de $S^{-1}A$-module*

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(E,G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}E, S^{-1}G)$$

este injectiv (resp. bijectiv).

DEMONSTRAŢIE. Rezultatul este valabil pentru $E = A$ deoarece $\operatorname{Hom}_A(A,G) \simeq G$. Întrucât luarea morfismelor şi localizarea comută cu sumele directe finite, rezultă că lema este adevărată pentru E modul liber de tip finit. În cazul în care E este de prezentare finită, există un şir exact $F_1 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$, în care F_1 şi F sunt A-module libere de rang finit. Se obţine diagrama comutativă de $S^{-1}A$-module

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(E,G) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}E, S^{-1}G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(F,G) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F, S^{-1}G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^{-1}\operatorname{Hom}_A(F_1,G) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F_1, S^{-1}G)
\end{array}$$

în care coloanele sunt exacte, iar ultimele două săgeţi orizontale sunt izomorfisme. Folosind lema şarpelui, se deduce imediat afirmaţia pentru E modul de prezentare finită. Dacă E este doar de tip finit, în această diagramă nu există pătratul de jos, deci săgeata orizontală de sus este monomorfism. □

PROPOZIŢIE 1.14. *Un modul E de tip finit peste un inel local (A, M, K) este proiectiv dacă şi numai dacă este modul liber.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă E este proiectiv, el este de prezentare finită conform corolarului 1.6. Se invocă apoi propoziţia 1.11 pentru şirul exact $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E \longrightarrow E \longrightarrow 0$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

EXEMPLE. 1. Un exemplu de modul proiectiv care nu este liber se obţine considerând un corp K, inelul $A := K \oplus K$ şi $E := 0 \oplus K$.

2. Un exemplu de sorginte geometrică: inelul de coordonate al sferei reale bidimensionale $A := \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) =: \mathbb{R}[x, y, z]$ şi modulul $E := (AdX \oplus AdY \oplus AdZ)/(xdX + ydY + zdZ)$. Faptul că E este A-modul proiectiv, dar nu liber, se exprimă echivalent: fasciculul tangent la sfera reală bidimensională nu este trivial. Metaforic vorbind, „nu poţi pieptăna părul de pe un cap sferic fără cărare sau vârtej".

EXERCIŢII.

1. Un A-modul E este proiectiv dacă şi numai dacă există o submulţime $I \subseteq E$ şi pentru fiecare $i \in I$ există un morfism $f_i : E \longrightarrow A$ astfel încât pentru orice $e \in E$, familia $\big(f_i(e)\big)_{i \in I}$ este de suport finit şi $e = \sum_{i \in I} f_i(e)$.

2. Dacă E este un A-modul proiectiv care nu este finit generat, există un modul liber F astfel încât $E \oplus F \simeq F$.

3. Fie F, G submodule proiective ale unui modul E. Arătaţi că $F + G$ este proiectiv dacă şi numai dacă $F \oplus G \simeq (F + G) \oplus (F \cap G)$.

4. a) E este modul proiectiv dacă şi numai dacă pentru orice morfism surjectiv $f : F \longrightarrow G$ între module injective şi pentru orice $g \in \mathrm{Hom}_A(E, G)$ există un morfism $h : E \longrightarrow G$ astfel încât $g = fh$.

b) E este modul injectiv dacă şi numai dacă pentru orice morfism injectiv $f : F \longrightarrow G$ între module proiective şi pentru orice $g \in \mathrm{Hom}_A(F, E)$ există un morfism $h : G \longrightarrow E$ astfel încât $g = hf$.

5. Fie A un domeniu de integritate. Atunci orice A-modul fără torsiune şi divizibil este injectiv.

6. Dacă E şi F sunt două module injective astfel încât E este izomorf cu un submodul al lui F şi F este izomorf cu un submodul al lui E, atunci $E \simeq F$.

7. Orice modul indecompozabil care este şi proiectiv şi injectiv este izomorf cu un ideal principal generat de un idempotent al inelului.

8. Pentru K corp şi Λ o mulţime infinită se consideră inelul $A := K^\Lambda$ şi idealul său $I := K^{(\Lambda)}$. Arătaţi că I este sumă directă de A-module simple injective, dar nu este A-modul injectiv.

2. Dimensiune proiectivă

Noţiunea căreia îi este dedicată această secţiune este rezultatul combinării a două idei. Prima a fost impusă de faimosul memoriu al lui D. Hilbert din 1890: informaţii despre structura unui modul pot fi obţinute indirect, studiind modulele sale de relaţii. Cealaltă idee cunoaşte multiple întrupări în matematică: o proprietate poate fi studiată asociindu-i o caracteristică numerică şi comparând-o fie cu numărul corespunzător

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

altor proprietăţi, fie cu numărul asociat altor obiecte cu aceeaşi proprietate.

Pentru orice modul E peste un inel A există un şir exact

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0$$

în care F_0 este liber şi $G_1 = \ker \varepsilon$ este numit *primul modul de syzygy (sau relaţii)* ale lui E. Prin iterarea acestei construcţii se ajunge la noţiunea de rezoluţie liberă

$$\mathbb{F}_\bullet : \ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0 . \qquad (20)$$

Dacă inelul este noetherian şi modulul este de tip finit, în şirurile construite mai sus se poate alege F_n de rang finit pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIŢIE 2.1. Un şir exact (20) în care F_n este modul liber (resp. proiectiv) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se numeşte *rezoluţie liberă* (resp. *proiectivă*) a lui E.

Este preferabilă studierea rezoluţiilor proiective din motive ce vor deveni clare după ce vom cunoaşte câteva dintre proprietăţile lor.

LEMA 2.2. *a) Dacă S este un sistem multiplicativ închis şi* (20) *este o rezoluţie liberă (resp. proiectivă) a lui E, atunci*

$$\ldots \longrightarrow S^{-1}F_n \xrightarrow{S^{-1}f_n} \ldots \longrightarrow S^{-1}F_1 \xrightarrow{S^{-1}f_1} S^{-1}F_0 \xrightarrow{S^{-1}\varepsilon} S^{-1}E \longrightarrow 0$$

este o rezoluţie liberă (resp. proiectivă) a lui $S^{-1}E$.

b) Fie B o A-algebră care este A-modul liber. Atunci

$$\ldots \longrightarrow B\otimes_A F_n \xrightarrow{B\otimes_A f_n} \ldots \longrightarrow B\otimes_A F_1 \xrightarrow{B\otimes_A f_1} B\otimes_A F_0 \xrightarrow{B\otimes_A \varepsilon} B\otimes_A E \longrightarrow 0$$

este o rezoluţie liberă (resp. proiectivă) a lui $B \otimes_A E$.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Localizarea fiind functor exact, exactitatea şirului se păstrează prin localizare. Apoi localizatul unui modul liber (resp. proiectiv) are aceeaşi proprietate peste inelul de fracţii.

b) Exactitatea şirului extins decurge din platitudinea lui B ca A-modul. Mai este nevoie de faptul că extinsul unui modul liber (resp. proiectiv) este tot aşa. □

O situaţie importantă se întâlneşte atunci când într-o rezoluţie proiectivă apare un modul nul.

DEFINIŢIE 2.3. Se spune că E are *dimensiunea proiectivă finită* dacă există o rezoluţie proiectivă de forma

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0 .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Minimul lungimilor unor astfel de rezoluţii este numit *dimensiunea proiectivă* a lui E şi se notează $\mathrm{pd}_A E$. Dacă nu există rezoluţii finite pentru E, se pune $\mathrm{pd}_A E = \infty$.

Un modul este proiectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{pd}_A E = 0$. În general $\mathrm{pd}_A E$ poate fi considerată o măsură a „depărtării" modulului de a fi proiectiv. Evident, pentru orice modul există o infinitate de rezoluţii proiective. Pentru a le compara folosim următorul rezultat:

PROPOZIŢIE 2.4. *(Lema lui Schanuel) Fie $n \geq 1$ şi şirurile exacte de lungime n în care F_i şi G_i $(0 \leq i \leq n-1)$ sunt module proiective*

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow H_n \xrightarrow{g_n} G_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \ldots \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0\ .$$

Atunci:

a) $C_n \oplus G_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus G_{n-3} \oplus \ldots \simeq H_n \oplus F_{n-1} \oplus G_{n-2} \oplus F_{n-3} \oplus \ldots\ ,$

b) C_n este proiectiv dacă şi numai dacă H_n este proiectiv.

DEMONSTRAŢIE. Pentru a demonstra afirmaţia de la punctul a) raţionăm prin inducţie după n.

În cazul $n = 1$, cum F_0 şi G_0 sunt proiective, există morfisme $u : F_0 \longrightarrow G_0$ şi $v : G_0 \longrightarrow F_0$ astfel încât $\varepsilon = \pi u$ şi $\pi = \varepsilon v$. Identificăm C_1 cu submodulul $f_1(C_1)$ al lui F_0 şi H_1 cu submodulul $g_1(H_1)$ al lui G_0. Endomorfismele α şi β ale lui $F_0 \oplus G_0$ definite prin relaţiile $\alpha(x, y) :=$ $:= (x, y - u(x))$ şi $\beta(x, y) := (x - v(y), y)$ sunt automorfisme. Se verifică imediat că $\alpha^{-1}\beta$ este izomorfismul căutat.

Presupunem acum că $n > 1$ şi că afirmaţia a) a fost stabilită pentru şirurile de lungime inferioară. Să notăm $C_{n-1} := \mathrm{Im}\, f_{n-1}$ şi $H_{n-1} :=$ $:= \mathrm{Im}\, g_{n-1}$. Conform ipotezei de inducţie există un izomorfism

$$C_{n-1} \oplus G_{n-2} \oplus F_{n-3} \oplus \ldots \simeq H_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus G_{n-3} \oplus \ldots$$

şi două şiruri exacte

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow F_{n-1} \oplus G_{n-2} \oplus F_{n-3} \oplus \ldots \longrightarrow C_{n-1} \oplus G_{n-2} \oplus F_{n-3} \oplus \ldots \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow G_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus G_{n-3} \oplus \ldots \longrightarrow H_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus G_{n-3} \oplus \ldots \longrightarrow 0.$$

Conform cazului $n = 1$, de aici rezultă izomorfismul căutat.

Afirmaţia b) rezultă din a) întrucât un sumand direct într-un modul proiectiv este proiectiv. □

Lema lui Schanuel explică de ce este preferabilă folosirea rezoluţiilor proiective şi nu a celor libere. În cele mai multe cazuri, un sumand direct al unui modul liber nu rămâne modul liber.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

COROLAR 2.5. *Fie* $0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0$ *un şir exact în care* F_i, $0 \leq i < n$, *sunt module proiective. Atunci:*

a) C_n *este modul proiectiv dacă şi numai dacă* pd $E \leq n$.

b) Dacă pd $E \geq n$, *atunci* pd $C_n =$ pd $E - n$.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Necesitatea este clară, iar suficienţa rezultă întrucât, conform propoziţiei precedente, C_n este sumand direct într-un modul proiectiv construit din rezoluţia dată şi dintr-o rezoluţie proiectivă de lungime n (ce se obţine completând eventual o rezoluţie proiectivă de lungime minimă a lui E cu module nule).

b) Dacă pd $E = \infty$, atunci şi C_n are dimensiunea proiectivă infinită (altfel, prelungind o rezoluţie proiectivă finită a sa cu şirul dat se obţine o rezoluţie proiectivă de lungime finită pentru E). În cazul pd $E = t < < \infty$ şi $t \geq n$, considerăm un şir exact de forma $0 \longrightarrow C_t \longrightarrow G_{t-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$ cu G_i proiective ($n \leq i < t$). Se obţine un şir exact $0 \longrightarrow C_t \longrightarrow G_{t-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$. Conform celor demonstrate la punctul *a*), C_t este proiectiv, deci pd $C_n \leq t - 1 - n + 1 = t - n$. Inegalitatea pd $C_n \geq$ pd $E - n$ se obţine legând de şirul dat o rezoluţie proiectivă ce dă pd C_n. □

COROLAR 2.6. *Dacă* A *este un inel noetherian şi* E *este un* A*-modul de tip finit, atunci* $\mathrm{pd}_A E = \sup\{\mathrm{pd}_{A_M}(E_M) : M \in \mathrm{Max}\, A\}$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă d notează acest supremum, din lema 2.2 se deduce $\mathrm{pd}_A E \geq d$, astfel că demonstraţia s-a încheiat în cazul $d = \infty$. Să presupunem acum $d < \infty$ şi să considerăm un şir exact $0 \longrightarrow C_d \longrightarrow F_{d-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$ în care F_i sunt module libere de rang finit. Atunci C_d este modul finit generat şi rezultatul precedent implică faptul că toate localizatele sale în idealele maximale sunt proiective (deci libere, conform propoziţiei 1.14). Cum proprietatea unui modul de prezentare finită de a fi proiectiv este o proprietate locală (*cf.* propoziţia 1.12), rezultă C_d proiectiv. Aşadar, $\mathrm{pd}_A E = d$. □

COROLAR 2.7. pd $E_1 \oplus E_2 = \sup\{$ pd E_1, pd $E_2\}$.

DEMONSTRAŢIE. Făcând suma directă „termen cu termen“ a două rezoluţii proiective pentru E_1 şi respectiv E_2, se obţine o rezoluţie proiectivă pentru $E_1 \oplus E_2$. Se aplică corolarele 2.5 şi 1.5. □

EXEMPLE. 1. Fie idealul I generat de clasa lui 2 în inelul finit $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Atunci $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}} I = 3A$. Notând $J := 3A$, se obţine $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}} J = I$, astfel că şirurile

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \xrightarrow{2} I \longrightarrow 0 \quad \text{şi} \quad 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{3} J \longrightarrow 0\,,$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde $A \xrightarrow{2} I$ este morfismul de înmulţire cu 2, sunt exacte. Ultimul şir este o rezoluţie proiectivă pentru J întrucât, conform exemplului 4 din secţiunea precedentă, I este A-modul proiectiv. Dar dimensiunea proiectivă a lui J ca A-modul nu este 1, ci 0, pentru că J este modul proiectiv din aceleaşi motive ca şi I.

2. Pentru idealul $I := 3A$ al inelului $A := \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ se găseşte un şir exact de forma $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{3} I \longrightarrow 0$. Din propoziţia 1.14 rezultă că I nu este A-modul proiectiv. Aşadar, o rezoluţie proiectivă pentru I este

$$\ldots \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} I \longrightarrow 0$$

şi $\mathrm{pd}_A I = \infty$.

PROPOZIŢIE 2.8. *Orice şir exact* $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3 \longrightarrow 0$ *de A-module poate fi introdus într-o diagramă comutativă*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] & G_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v_1"'] & F_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v_2"'] & F_3 \arrow[r] \arrow[d, "v_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

cu liniile şi coloanele exacte, unde F_1, F_2 şi F_3 sunt module proiective.

DEMONSTRAŢIE. Coloana din stânga, resp. dreapta, este o prezentare arbitrară pentru E_1, resp. E_3. Modulul $F_2 := F_1 \oplus F_3$ este proiectiv conform corolarului 1.5. Notăm $i : F_1 \longrightarrow F_2$ incluziunea canonică şi $p : F_2 \longrightarrow F_3$ proiecţia canonică. Morfismul $v_2 : F_2 \longrightarrow E_2$ este definit în modul următor: întrucât F_3 este modul proiectiv, există $u \in \mathrm{Hom}_A(F_3, E_2)$ astfel încât $v_3 = gu$; pentru $(x_1, x_3) \in F_2$ punem $v_2(x_1, x_3) := f(v_1(x_1)) + u(x_3)$. O verificare de rutină ne asigură că v_2 este un morfism de module.

Arătăm că v_2 este surjectiv. Fie $y_2 \in E_2$ şi $x_3 \in F_3$ astfel ca $v_3(x_3) = g(y_2)$. Atunci $g(y_2) = g(u(x_3))$ este echivalent cu $y_2 - u(x_3) \in \ker g = \mathrm{Im}\, f$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă există y_1 în E_1 cu $y_2 = u(x_3) + f(y_1)$. Din surjectivitatea morfismului v_1 rezultă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$y_1 \in \operatorname{Im} v_1$. Cum y_2 a fost arbitrar în E_2, s-a obţinut că v_2 este morfism surjectiv.

Este uşor de verificat comutativitatea pătratelor inferioare din diagramă. Se pune $G_2 := \ker v_2$ şi cu lema şarpelui se obţine exactitatea liniei superioare. □

Iterând construcţia din propoziţia 2.8, se obţine că orice şir exact scurt apare ca o ultimă linie într-o diagramă comutativă cu liniile şi coloanele exacte, în care coloanele au aceeaşi lungime, arbitrar de mare, şi—cu excepţia eventual a ultimului termen—conţin numai module proiective.

TEOREMA 2.9. *(Teorema de comparaţie) Fie dat un şir exact scurt* $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$. *Atunci:*

a) Dacă două module din şirul dat au dimensiunea proiectivă finită, şi cel de al treilea modul are dimensiunea proiectivă finită.

b) În acest caz $\operatorname{pd} E_2 \leq \max\{\operatorname{pd} E_1, \operatorname{pd} E_3\}$, *iar dacă inegalitatea este strictă, atunci* $\operatorname{pd} E_3 = \operatorname{pd} E_1 + 1$.

DEMONSTRAŢIE. $a)$ Să presupunem că două dintre modulele date au dimensiunea proiectivă finită. Raţionăm prin inducţie după n, maximul acestor dimensiuni. Dacă $n = 0$, două dintre modulele date sunt proiective. Dacă $\operatorname{pd} E_3 = 0$, atunci şirul dat este scindat şi toate cele trei module sunt proiective. Dacă $\operatorname{pd} E_3 \neq 0$, şirul dat constituie o rezoluţie proiectivă de lungime unu pentru E_3, deci $\operatorname{pd} E_3 = 1$. Fie acum $n > 0$. Construim o diagramă cu proprietăţile din propoziţia precedentă. Din corolarul 2.5 rezultă că două dintre modulele G_1, G_2, G_3 au dimensiunea proiectivă mai mică decât n. Aplicând acestora ipoteza de inducţie, se obţine $\operatorname{pd} G_i < \infty$ pentru $i = 1, 2, 3$. Este evident însă că $\operatorname{pd} E_i = \operatorname{pd} G_i + 1$ pentru orice indice i.

$b)$ De această dată inducţia se face după $d := \operatorname{pd} E_2$. În cazul $d = 0$, corolarul 2.5 implică $\operatorname{pd} E_3 = \operatorname{pd} E_1 + 1$ sau $\operatorname{pd} E_3 = 0$. Pentru E_3 proiectiv, şirul dat este scindat, deci $\operatorname{pd} E_1 = 0$, astfel că s-a obţinut proprietatea anunţată. Presupunem acum că $d > 0$ şi că aserţiunea a fost stabilită pentru toate şirurile exacte scurte în care termenul din mijloc are dimensiunea proiectivă cel mult $d - 1$. Din diagrama construită cu ajutorul propoziţiei 2.8 şi din ipoteza de inducţie (aplicabilă conform corolarului 2.5), rezultă

$$\operatorname{pd} G_2 \leq \max\{\operatorname{pd} G_1, \operatorname{pd} G_3\}$$

şi $\operatorname{pd} G_3 = \operatorname{pd} G_1 + 1$ în eventualitatea că $\operatorname{pd} G_2 = \max\{\operatorname{pd} G_1, \operatorname{pd} G_3\}$.

Dacă modulele E_1 şi E_3 nu sunt proiective, atunci $\operatorname{pd} G_i = \operatorname{pd} E_i - 1$ pentru $i = 1, 2, 3$, deci afirmaţia $b)$ este stabilită în acest caz. Dacă E_3 este proiectiv, atunci $E_2 \simeq E_1 \oplus E_3$ şi din corolarul 2.7 se deduce

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

pd $E_2 = \sup\{\text{pd } E_1, \text{pd } E_3\} = \text{pd } E_1$. Dacă E_1 este modul proiectiv, în diagrama dată de propoziţia 2.8 avem $G_1 = 0$ şi $G_3 \simeq G_2$, deci pd $E_2 = \text{pd } G_2 + 1 = \text{pd } G_3 + 1 = \text{pd } E_3$. □

Exerciţii.

1. Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism de inele şi F un B-modul. Atunci:

a) $\text{pd}_A F \leq \text{pd}_B F + \text{pd}_A B$.

b) Dacă B este A-modul plat şi E este un A-modul, atunci $\text{pd}_B(E \otimes_A B) \leq \text{pd}_A E$.

2. Fie E un A-modul şi $(F_n)_{n\geq 0}$ un lanţ ascendent de submodule ale sale. Notăm $F := \bigcup_{n\geq 0} F_n$. Dacă există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $\text{pd}_A(F_n/F_{n+1}) \leq t$ pentru orice $n \geq 1$, atunci $\text{pd}_A F \leq t$.

3. Pentru un inel A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) orice ideal este modul proiectiv,

(ii) orice submodul al unui modul proiectiv este proiectiv,

(iii) orice modul factor al unui modul injectiv este injectiv.

4. Fie A un domeniu de integritate şi K corpul său de fracţii. Pentru orice ideal I se defineşte $I^{-1} := \{x \in K : xI \subseteq A\}$. Se spune că I este inversabil dacă $II^{-1} = A$.

a) Verificaţi că pentru orice ideal $I \leq A$, I^{-1} este A-modul.

b) Arătaţi că un ideal I este inversabil dacă şi numai dacă este A-modul proiectiv de tip finit.

c) Arătaţi că orice ideal $I \leq A$ este inversabil dacă şi numai dacă A-modulele injective coincid cu cele proiective.

3. Teorema Auslander-Buchsbaum

În această secţiune vom considera un inel noetherian local (A, M, K) şi un modul de tip finit E. În acest context, dispare diferenţa între modulele proiective finit generate şi modulele libere. Teorema Auslander-Buchsbaum exprimă o legătură între dimensiunea proiectivă şi profunzimea unui modul de tip finit ce admite rezoluţii libere finite.

Definiţie 3.1. O rezoluţie liberă a lui E

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+1}} F_n \xrightarrow{f_n} \ldots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0 \tag{21}$$

este numită *minimală* dacă $\text{Im } f_n \subseteq MF_{n-1}$ pentru orice $n \geq 1$.

Altfel spus, o rezoluţie liberă este minimală atunci şi numai atunci când morfismele din complexul obţinut prin tensorizare cu corpul rezidual sunt nule. În acest caz, lema lui Nakayama implică $\mu(F_0) = \mu(E)$ şi $\mu(F_n) = \mu(\text{Im } f_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru orice modul finit generat se poate construi o rezoluţie minimală: se ia F_0 liber de rang egal cu numărul minim de generatori ai lui E; atunci $C_0 := \ker\,(F_0 \longrightarrow E) \subseteq MF_0$; se ia F_1 liber de rang egal cu $\mu(C_0)$, ş.a.m.d. Deşi această rezoluţie a fost construită urmărindu-se „optimizare locală" (fiecare modul liber să aibă numărul minim de generatori), ea este „economicoasă global": se poate arăta că este sumand direct în orice rezoluţie liberă pentru E. În consecinţă, orice două rezoluţii minimale ale aceluiaşi modul sunt izomorfe.

LEMA 3.2. *Pentru orice două rezoluţii libere minimale ale lui E*

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+1}} F_n \xrightarrow{f_n} \ldots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} E \longrightarrow 0$$

$$\ldots \xrightarrow{g_{n+1}} G_n \xrightarrow{g_n} \ldots \xrightarrow{g_2} G_1 \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$$

avem $\mu(F_n) = \mu(G_n)$ pentru orice indice n.

DEMONSTRAŢIE. Din definiţie $\mu(F_0) = \mu(E) = \mu(G_0)$. Fie $C_{n+1} := \mathrm{Im}\, f_{n+1}$, $H_{n+1} := \mathrm{Im}\, g_{n+1}$ $(n \geq 0)$. Din lema lui Schanuel se deduce

$$C_{n+1} \oplus G_n \oplus F_{n-1} \oplus G_{n-2} \ldots \simeq H_{n+1} \oplus F_n \oplus G_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus \ldots$$

Dacă s-a demonstrat deja $\mu(F_i) = \mu(G_i)$ pentru $i \leq n$, folosind acest izomorfism rezultă $\mu(F_{n+1}) = \mu(C_{n+1}) = \mu(H_{n+1}) = \mu(G_{n+1})$. □

DEFINIŢIE 3.3. Invariantul $\beta_i := \mu(F_i)$, $i \in \mathbb{N}$, se numeşte *cel de al i-lea număr Betti al lui E.* Numerele Betti ale corpului rezidual se numesc *numerele Betti ale inelului.*

Numerele Betti intervin în numeroase locuri în algebră. Cu ajutorul lor se caracterizează unele clase de module sau inele. Deocamdată arătăm că dacă în şirul numerelor Betti ale unui modul apare o valoare nulă, toate numerele de indice mai mare vor fi nule.

COROLAR 3.4. *Dacă (21) este o rezoluţie liberă minimală a unui modul E de dimensiune proiectivă finită n, atunci $F_n \neq 0$ şi $F_t = 0$ pentru orice $t > n$.*

DEMONSTRAŢIE. Conform corolarului 2.5, $C_n := \mathrm{Im}\, f_n$ este A-modul liber, astfel că şirul exact

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

este o rezoluţie liberă minimală pentru E. Demonstraţia se încheie aplicând rezultatul precedent. □

LEMA 3.5. *Fie $a \in M$ un nondivizor al lui zero pe E. Atunci E este A-modul liber dacă şi numai dacă E/aE este A/aA-modul liber.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Dacă E este A-modul liber, atunci E/aE este A/aA-modul liber din proprietăţi generale ale produsului tensorial. Demonstrăm reciproca. Fie o prezentare minimală $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$ pentru E, cu F modul liber. Din lema şarpelui aplicată diagramei comutative

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle a}\big\downarrow & & {\scriptstyle a}\big\downarrow & & {\scriptstyle a}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

în care morfismele verticale sunt omotetiile determinate de a, se obţine un şir exact

$$\mathrm{Ann}_G(a) \longrightarrow \mathrm{Ann}_F(a) \longrightarrow \mathrm{Ann}_E(a) \longrightarrow G/aG \longrightarrow F/aF \xrightarrow{p} E/aE \tag{22}$$

în care morfismul cel mai din stânga este injectiv, iar morfismul p este surjectiv. Prin ipoteză $\mathrm{Ann}_E(a) = 0$. Dacă E/aE este A/aA-modul liber, atunci p este izomorfism, întrucât F/aF şi E/aE au acelaşi număr minimal de generatori. Rezultă $G/aG = 0$, ceea ce, conform lemei lui Nakayama, este echivalent cu $E \simeq F$. □

Acelaşi raţionament justifică o afirmaţie mai generală.

LEMA 3.6. *Dacă $a \in M$ este un nondivizor al lui zero pe A şi pe E, atunci* $\mathrm{pd}_A(E) = \mathrm{pd}_{A/aA}(E/aE)$.

DEMONSTRAŢIE. Nu avem nimic de demonstrat dacă cele două dimensiuni proiective sunt infinite. Folosim din nou şirul exact (22). În ipotezele prezentei leme avem $\mathrm{Ann}_F(a) = 0$, $\mathrm{Ann}_E(a) = 0$, deci a este nondivizor al lui zero pe G, iar şirul

$$0 \longrightarrow G/aG \longrightarrow F/aF \xrightarrow{p} E/aE \longrightarrow 0$$

este exact. Concluzia dorită rezultă din lema precedentă dacă una din cele două dimensiuni proiective este nulă.

Să presupunem acum că $\mathrm{pd}_A(E) = n$ cu $0 < n < \infty$. Atunci $\mathrm{pd}_A(G) = n - 1$ conform teoremei de comparaţie. Prin inducţie putem presupune $\mathrm{pd}_A(G) = \mathrm{pd}_{A/aA}(G/aG)$. Cum $\mathrm{pd}_{A/aA}(E/aE) > 0$ în virtutea lemei 3.5, avem

$$\mathrm{pd}_{A/aA}(E/aE) = \mathrm{pd}_{A/aA}(G/aG) + 1 = \mathrm{pd}_A(G) + 1 = \mathrm{pd}_A(E)\ .$$

Un raţionament similar se efectuează în cazul $\mathrm{pd}_{A/aA}(E/aE) = t$ cu $0 < t < \infty$. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Încheiem pregătirile necesare pentru demonstrarea teoremei Auslander-Buchsbaum cu un rezultat analog teoremei de comparaţie, rezultat ce descrie comportamentul profunzimii într-un şir exact scurt.

LEMA 3.7. *Pentru un modul de tip finit E peste un inel local noetherian (A, M, K) se consideră un şir exact de forma $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$, cu F liber de rang finit.*

a) Dacă $\operatorname{prof} A > \operatorname{prof} E$, *atunci* $\operatorname{prof} G = \operatorname{prof} E + 1$.

b) Dacă $\operatorname{prof} A = \operatorname{prof} E$, *atunci* $\operatorname{prof} G = \operatorname{prof} E$.

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după $d := \operatorname{prof} E$. Pentru $d = 0$, afirmaţia $b)$ este evidentă, iar pentru a demonstra $a)$ se consideră $a \notin Z(A)$ şi un şir (22), care dă $\operatorname{Ann}_G(a) = 0$ şi exactitatea şirului

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ann}_E(a) \longrightarrow G/aG \longrightarrow F/aF \longrightarrow E/aE \longrightarrow 0\ .$$

Din $\operatorname{prof} E = 0$ conchidem că $M \in \operatorname{Ass}_A(E)$, adică $M = \operatorname{Ann}_A(x)$ pentru un element nenul x al lui E. Atunci $x \in \operatorname{Ann}_E(a)$, deci

$$M \in \operatorname{Ass}\left(\operatorname{Ann}_E(a)\right) \subseteq \operatorname{Ass}\,(G/aG)\ ,$$

încât $\operatorname{prof}\,(G/aG) = 0$. Aceasta, împreună cu relaţia deja stabilită $a \notin Z(G)$, implică $\operatorname{prof} G = 1$.

Dacă $d > 0$, se alege $a \in M \setminus (Z(A) \cup Z(E))$ (posibil conform lemei de evitare) şi se continuă raţionamentul folosind şirul exact

$$0 \longrightarrow G/aG \longrightarrow F/aF \longrightarrow E/aE \longrightarrow 0\ .$$

□

TEOREMA 3.8. *(Teorema Auslander-Buchsbaum) Fie E un modul finit generat peste un inel noetherian local (A, M, K). Dacă* $\operatorname{pd}_A E < \infty$, *atunci* $\operatorname{pd} E + \operatorname{prof} E = \operatorname{prof} A$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $n := \operatorname{pd} E$ şi

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

o rezoluţie liberă minimală a lui E. Notăm $G_i := \operatorname{Im} f_i$, $1 \le i \le n$, şi folosim inducţia după $d := \operatorname{prof} A$.

În cazul $d = 0$ există un element nenul şi neinversabil $a \in A$ astfel încât $aM = 0$. Dacă am avea $n > 0$, atunci din $F_n \subseteq MF_{n-1}$ ar rezulta $aF_n \subseteq aMF_{n-1} = 0$, deci $F_n = 0$, contrazicându-se $\operatorname{pd} E = n \ge 1$. Aşadar, $n = 0$, E este modul liber şi prin urmare profunzimea sa coincide cu profunzimea inelului.

Fie acum $d > 0$ şi să presupunem că teorema este valabilă pentru inele locale de profunzime strict mai mică decât d. Dacă E are

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

profunzimea strict pozitivă, conform lemei de evitare se găseşte un element a în M care este nondivizor al lui zero atât pe A, cât şi pe E. Atunci $\operatorname{prof}_A(A/aA) = d - 1$, $\operatorname{prof}_A(E/aE) = \operatorname{prof}_A(E) - 1$ şi, conform lemei 3.6, $\operatorname{pd}_{A/aA}(E/aE) = \operatorname{pd}_A(E)$. Concluzia dorită se obţine aplicând ipoteza de inducţie.

Dacă $d > 0$ şi $\operatorname{prof} E = 0$, din lema 3.7 rezultă $\operatorname{prof} G_1 = 1$. În plus, $\operatorname{pd} G_1 = \operatorname{pd} E - 1$ şi conform cazului demonstrat în aliniatul precedent $\operatorname{prof} G_1 + \operatorname{pd} G_1 = \operatorname{prof} A$. După înlocuiri, ultima relaţie devine $\operatorname{prof} A = \operatorname{pd} E$. □

4. Caracterizări omologice pentru inele regulate

Metodele de sorginte geometrică sunt suficient de puternice pentru un studiu al inelelor afine. Pentru a extinde rezultatele în cadrul abstract specific algebrei comutative, au fost „importate" metode din topologia algebrică. În această secţiune prezentăm proprietăţi ale inelelor regulate în ale căror demonstraţii se folosesc noţiuni şi instrumente fundamentale din algebra omologică.

Începem cu o sofisticată lemă de evitare, una din multele posibilităţi de a rafina lema de evitare deja cunoscută.

LEMA 4.1. *Fie I şi J ideale într-un inel noetherian A astfel încât $J \subseteq I$, $V(I)=V(J)$, $\mu(I/J) =: m$. Dacă $P_1, \ldots, P_s$ sunt ideale prime a căror reuniune nu conţine I, atunci există $a_1, \ldots, a_m \in I$ astfel încât:*

a) $I = J + (a_1, \ldots, a_m)$,

b) reuniunea idealelor prime P_j nu conţine nici unul dintre elementele a_i,

c) orice ideal prim Q ce conţine idealul $(a_1, \ldots, a_m)$, dar nu conţine I, are înălţimea cel puţin m.

DEMONSTRAŢIE. Construim iterativ elemente

$$a_1, \ldots, a_r \in I \setminus \cup\{\, P_j \,:\, 1 \le j \le r \,\}$$

ale căror imagini $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ în I/J fac parte dintr-un sistem minimal de generatori ai acestui ideal şi care au proprietatea

$$\operatorname{ht}(Q) \ge r \quad \text{pentru orice } Q \in \mathrm{V}(a_1, \ldots, a_r) \setminus \mathrm{V}(I)\ .$$

Pentru $r = 0$ nu e nimic de arătat. Fie $1 \le r < m$ şi $a_1, \ldots, a_r$ cu proprietăţile dorite. Alegem $a \in I$ astfel încât $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r, \overline{a}$ fac parte dintr-un sistem minimal de generatori pentru I/J. Fie $Q_1, \ldots, Q_t$ toţi divizorii primi minimali ai idealului $(a_1, \ldots, a_r, a)$ care nu conţin I. Notăm X mulţimea elementelor maximale (în raport cu incluziunea) din $\{\, Q_1, \ldots, Q_t, P_1, \ldots, P_s \,\}$, $X_1 := \{\, P \in X \,:\, a \in P \,\}$, $X_2 := X \setminus X_1$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Din ipoteza $V(I)=V(J)$, modul de alegere a primelor din X şi din lema de evitare rezultă $J \nsubseteq \cup\{ P : P \in X \}$. Alegem un element b din $J \setminus \cup\{ P : P \in X \}$. Cu lema de evitare a idealelor prime se găseşte un element $c \in \cap\{ P : P \in X_2 \} \setminus \cup\{ Q : Q \in X_1 \}$. Luând $a_{r+1} := a+bc$, se vede că se verifică condiţia b). Cum $a_{r+1} - a \in J$, rezultă că $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_r$, $\overline{a}_{r+1}$ fac parte dintr-un sistem minimal de generatori ai lui I/J. În fine, pentru $Q \in V(a_1, \dots, a_{r+1}) \setminus V(I)$, rezultă că idealul Q conţine unul dintre Q_1, ..., Q_t, să spunem Q_1. Conform ipotezei inductive avem $\text{ht } Q_1 \geq r$, iar prin construcţie $a_{r+1} \notin Q_1$. Conchidem că $\text{ht } Q \geq r+1$.

Astfel s-a încheiat pasul inductiv al demonstraţiei. Construcţia se termină cu un şir de elemente care îndeplinesc toate condiţiile cerute a), b), c). □

Folosind lema tocmai demonstrată, se poate întări un rezultat anterior.

PROPOZIŢIE 4.2. *Dacă I este un ideal al unui inel noetherian A cu $\mu(I/I^2) > \dim A$, atunci $\mu(I) = \mu(I/I^2)$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $m := \mu(I/I^2)$. Conform lemei anterioare, există a_1, ..., $a_m \in I$ ale căror imagini în I/I^2 formează un sistem minimal de generatori pentru acest ideal şi care au proprietatea că orice ideal prim ce conţine $(a_1, \dots, a_m)$, dar nu conţine I, are înălţimea cel puţin m. Din ipoteza $m > \dim A$ rezultă că $V(a_1, \dots, a_m) \setminus V(I)$ este mulţimea vidă, adică $J := I/(a_1, \dots, a_m)$ este un ideal nilpotent în inelul $B := A/(a_1, \dots, a_m)$. Pe de altă parte, $J = J^2$ pentru că $a_1 + I^2$, ..., $a_m + I^2$ generează minimal A/I-modulul I/I^2. Conchidem $J = 0$, deci $I = (a_1, \dots, a_m)$ şi $\mu(I) \leq m = \mu(I/I^2)$. Dar inegalitatea contrară are loc întotdeauna (decurge direct din definiţii). □

Cândva am menţionat în treacăt faptul că şirurile regulate se comportă ca variabilele într-un inel de polinoame. A sosit momentul ca această remarcă să primească o formulare precisă.

Fie $I = (a_1, \dots, a_m)$ un ideal finit generat într-un inel A. Se verifică fără nici o dificultate că aplicaţia

$$\phi : A/I[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow \text{gr}_I(A) \ , \ a + I \mapsto a + I \ , \ X_i \mapsto a_i + I^2 \ ,$$

este un epimorfism omogen de A/I-algebre graduate. Atenţie: morfismul ϕ depinde de elementele considerate, chiar dacă notaţia nu pune în evidenţă acest aspect!

PROPOZIŢIE 4.3. *Fie A un inel (nu neapărat noetherian), a_1, ..., a_m un A-şir şi $I := (a_1, \dots, a_m)$. Considerăm a_2/a_1, ..., a_m/a_1 ca elemente în inelul total de fracţii $Q(A)$ şi definim un morfism de*

A-algebre

$$\beta : A[Y_2, \ldots, Y_m] \longrightarrow A[a_2/a_1, \ldots, a_m/a_1] \ , \ Y_i \mapsto a_i/a_1 \ .$$

Atunci:

a) Morfismul surjectiv de A/I-algebre graduate ϕ este un izomorfism.

b) β este un morfism surjectiv de A-algebre, al cărui nucleu este $J := (a_1Y_2 - a_2, \ldots, a_1Y_m - a_m)$.

DEMONSTRAŢIE. Prima afirmaţie este echivalentă cu următoarea: pentru orice polinom *omogen* $F \in A[X_1, \ldots, X_m]$ de grad d, din $F(a_1, \ldots, a_m) \in I^{d+1}$ rezultă că F are toţi coeficienţii din I. Mai departe, această proprietate are loc dacă şi numai dacă orice polinom omogen care se anulează când este evaluat în şirul considerat are toţi coeficienţii din I. Să considerăm un polinom omogen $F \in A[X_1, \ldots, X_m]$ de grad d astfel încât $F(a_1, \ldots, a_m) = 0$. Atunci $a_1^d F(1, a_2/a_1, \ldots, a_m/a_1) = F(a_1, \ldots, a_m) = 0$. Cum a_1^d este nondivizor al lui zero pe A, înseamnă că $F(1, Y_2, \ldots, Y_m)$ aparţine nucleului morfismului β. Deoarece $a_1Y_2 - a_2$, ..., $a_1Y_m - a_m$ sunt polinoame cu coeficienţi în I, este suficient să demonstrăm punctul b).

Este evident că $a_1Y_j - a_j \in$ker β pentru $2 \leq j \leq m$. Demonstrăm incluziunea ker $\beta \subseteq J$ prin inducţie după lungimea şirului regulat. Pentru $m = 2$ şi $F \in A[Y_2]$ astfel încât $F(a_2/a_1) = 0$, cu teorema împărţirii cu rest (care funcţionează în orice inel de polinoame dacă împărţitorul este polinom unitar!) se obţine $F(Y_2) = (Y_2 - a_2/a_1)g(Y_2)$, unde $g \in Q(A)[Y_2]$. După eliminarea numitorilor se obţine o egalitate de forma $a_1^d F(Y_2) = (a_1Y_2 - a_2)G(Y_2)$, cu $G \in A[Y_2]$ şi $d \in \mathbb{N}$. Considerăm această relaţie modulo a_1^d şi, ţinând cont că a_1^d, a_2 este A-şir, se găseşte că toţi coeficienţii polinomului G sunt divizibili cu a_1^d. După simplificare cu acest nondivizor al lui zero rămâne $F \in (a_1Y_2 - a_2)$.

Fie acum $m > 2$. Morfismul β se factorizează astfel:

$$A[Y_2, \ldots, Y_m] \xrightarrow{\beta_1} A[a_2/a_1][Y_3, \ldots, Y_m] \xrightarrow{\beta_2} A[a_2/a_1, \ldots, a_m/a_1] \ ,$$

unde $\beta_1(Y_2) := a_2/a_1$, $\beta_1(Y_j) := Y_j$ pentru $j = 3$, ..., m, iar β_2 este morfismul de $A[a_2/a_1]$-algebre definit similar cu β. Am văzut deja că ker $\beta_1 = (a_1Y_2 - a_2)A[Y_2, \ldots, Y_m]$. Notăm $B := A[a_2/a_1]$. Din $a_1B = (a_1, a_2)B$ şi $B \simeq A[Z]/(a_1Z - a_2)$ (*cf.* caz $m = 2$), rezultă $B/a_1B = B/(a_1, a_2)B \simeq A/(a_1, a_2)A[Z]$. Şirul a_3, ..., a_m este regulat pe $A/(a_1, a_2)A$, deci şi pe $A/(a_1, a_2)A$-modulul liber $A/(a_1, a_2)A[Z]$. Conchidem că a_1, a_3, ..., a_m este B-şir. Conform ipotezei inductive, β_2 este izomorfism. □

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Există o reciprocă parţială a rezultatului formulat în prima parte a propoziţiei anterioare. O demonstraţie se găseşte în [**19**, capitolul VII, propoziţia 5.3] sau în [**14**, capitolul V, propoziţia 5.12].

TEOREMA 4.4. *Fie $a_1, \ldots, a_m$ un sistem de generatori pentru un ideal propriu I dintr-un inel A. Presupunem că $A_t := A/(a_1, \ldots, a_t)A$, $t = 0, 1, \ldots, m$, este separat în topologia I-adică. Atunci:*

a) Dacă morfismul surjectiv de A/I-algebre graduate

$$\phi : A/I[X_1, \ldots, X_m] \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A) \ , \ X_i \mapsto a_i + I^2 \ ,$$

este izomorfism, atunci $a_1, \ldots, a_m$ este un A-şir.

b) Dacă în plus A este inel noetherian, iar I este ideal prim, atunci A este domeniu de integritate întreg închis în corpul său de fracţii.

COROLAR 4.5. *Dacă I este un ideal generat de un şir regulat, atunci A/I-modulele I^m/I^{m+1} sunt libere pentru orice număr natural m. Dacă inelul este noetherian, I este un ideal intersecţie completă.*

LEMA 4.6. *Fie E un modul de tip finit peste un inel noetherian nenul A. Dacă există module libere de rang finit F_i, unde $0 \leq i \leq n$, astfel încât şirul de A-module $0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$ este exact, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathrm{Ann}\ E \neq 0$,

(ii) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{rang}\, F_i = 0$,

(iii) Ann E *conţine un nondivizor al lui zero pe A.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice ideal prim P asociat lui A avem $\mathrm{pd}_{A_P}(E_P) < \infty$ şi prof $(A_P) = 0$, deci conform teoremei Auslander-Buchsbaum $\mathrm{pd}_{A_P}(E_P) = 0$, adică E_P este A_P-modul liber. Printr-un argument inductiv ce foloseşte localizarea în P a rezoluţiei libere din enunţ se stabileşte

$$\mathrm{rang}\ (E_P) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{rang}\ F_i \ . \tag{23}$$

Presupunem că $I := \mathrm{Ann}\ E \neq 0$ şi arătăm prin reducere la absurd că există un ideal prim P asociat inelului A astfel ca $E_P = 0$. Condiţia (*ii*) va rezulta atunci din relaţia (23). Dacă E_P, $P \in \mathrm{Ass}\ A$, este modul nenul, fiind liber, aşa cum am văzut mai sus, înseamnă că $\mathrm{Ann}_{A_P} E_P = IA_P = 0$. Întrucât suportul unui modul finit generat constă din idealele prime ce conţin anulatorul modulului, rezultă că $\mathrm{Ann}_A(I)$ nu este conţinut în P. Dacă această relaţie are loc pentru orice ideal P asociat inelului A, rezultă că anulatorul idealului I conţine un nondivizor al lui zero a pe A. Din $aI = 0$ se obţine contradicţia $I = 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Arătăm acum că (*ii*) implică (*iii*). Comparând formula (23) şi condiţia (*ii*), se deduce $E_P = 0$, adică $IA_P = A_P$ pentru orice $P \in \operatorname{Ass} A$. Din nou conchidem $I \not\subseteq P$ şi condiţia (*iii*) rezultă din relaţia $Z(A) = \cup\{ P : P \in \operatorname{Ass} A \}$. □

Putem demonstra acum rezultatul central al acestui capitol:

TEOREMA 4.7. *(Ferrand-Vasconcelos) Fie A un inel noetherian şi $I \neq A$ un ideal al său.*

a) Dacă I este generat de un A-şir, atunci I/I^2 este A/I-modul liber şi $\mathrm{pd}_A(A/I) < \infty$.

b) Reciproca este valabilă dacă A este inel local.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Fie $a_1, \ldots, a_t$ un şir regulat pe A ce generează I. Ştim deja din corolarul 4.5 că I/I^2 este A/I-modul liber. Arătăm $\mathrm{pd}_A(A/I) = t$ prin inducţie după t. Cazul iniţial $t = 0$ este clar: atunci $I = 0$ şi $A/I = A$ fiind liber, $\mathrm{pd}_A(A/I) = 0$. Fie acum $t > 0$. Din şirul exact

$$0 \longrightarrow A/(a_1, \ldots, a_{t-1}) \xrightarrow{a_t} A/(a_1, \ldots, a_{t-1}) \longrightarrow A/(a_1, \ldots, a_t) \longrightarrow 0$$

şi din ipoteza inductivă $\mathrm{pd}_A\left(A/(a_1, \ldots, a_{t-1})A\right) = t - 1$ se obţine cu teorema de comparaţie $\mathrm{pd}_A(A/I) \leq t$. Pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ ce conţine I, şirul $a_1 \ldots, a_t$ este A_P-regulat, deci

$$\mathrm{prof}(A_P) = \mathrm{prof}\ (A_P/(a_1, \ldots, a_t)A_P) + t\ .$$

Folosind teorema Auslander-Buchsbaum şi faptul că dimensiunea proiectivă nu creşte prin localizare, se obţine:

$$\begin{aligned} t = \mathrm{prof}\ (A_P) - \mathrm{prof}\ (A_P/IA_P) &= \mathrm{pd}_{A_P}(A_P/IA_P) \leq \\ &\leq \mathrm{pd}_A(A/I)\ . \end{aligned}$$

b) Fie acum (A, M, K) un inel local noetherian. Vom arăta că orice ideal propriu I cu proprietăţile $\mathrm{pd}_A(A/I) < \infty$ şi I/I^2 este A/I-modul liber de rang t este generat de un A-şir de lungime t. Ca de obicei, raţionăm prin inducţie, după t de această dată.

Când $t = 0$, avem $I = I^2$, deci $I = 0$ conform lemei lui Nakayama. Presupunem acum că $t > 0$ şi că aserţiunea a fost stabilită pentru ranguri mai mici decât t. Din lema 4.6 rezultă că I conţine un nondivizor al lui zero pe A. Alegem $a_1, \ldots, a_t \in I$ elemente ale căror imagini $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_t$ în I/I^2 constituie o bază a acestui A/I-modul liber şi notăm $J := (a_2, \ldots, a_t) + I^2$. Observăm că $V(I) = V(J)$ şi $\mu(I/J) = 1$. Dacă X constă din elementele maximale ale mulţimii $\operatorname{Ass} A$, atunci $I \not\subseteq \cup\{ P : P \in X \}$. Din lema 4.1 rezultă existenţa unui nondivizor al lui zero $b \in I$ a cărui imagine în I/I^2 generează I/J. Înlocuind a_1 cu

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b, putem presupune că a_1 este un nondivizor al lui zero pe A ce induce o bază pentru A/I-modulul I/J.

Introducem următoarele notaţii: $B := A/a_1A$, $L := I/a_1A$ şi arătăm că B şi L satisfac condiţii analoage celor postulate pentru A şi I. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} L/L^2 &\simeq I/(a_1A+I^2) \simeq (I/I^2)/((a_1A+I^2)/I^2) \simeq \\ &\simeq \textstyle\sum_{i=2}^t \overline{a}_i \cdot A/I \simeq \sum_{i=2}^t \overline{a}_i \cdot B/L \end{aligned}$$

întrucât $A/I \simeq B/L$, deci L/L^2 este B/L-modul liber. Din $I = a_1A+J$ deducem $I/a_1I \simeq (a_1A/a_1I) + (J/a_1I)$. Vom arăta că această sumă este directă. Avem $a_1A/a_1I \simeq A/I$ pentru că a_1 este nondivizor al lui zero şi $J \cap a_1A = a_1I$ întrucât a_1 induce bază pentru A/I-modulul I/J. Prin urmare,

$$J/a_1I = J/(J\cap a_1A) \simeq (a_1A+J)/a_1A = I/a_1A = L$$

şi $(a_1A/a_1I) \cap (J/a_1I) = 0$. În concluzie, $I/a_1I \simeq (a_1A/a_1I) \oplus L$.

Deoarece a_1 este nondivizor al lui zero şi I (ca şi A/I) are dimensiunea proiectivă finită, rezultă $\mathrm{pd}_B(I/a_1I) = \mathrm{pd}_A(I) < \infty$. Atunci $\mathrm{pd}_B(L) < \infty$ (dimensiunea proiectivă a unui sumand direct nu poate depăşi dimensiunea proiectivă a modulului sumă directă) şi din şirul exact de B-module $0 \longrightarrow L \longrightarrow B \longrightarrow B/L \longrightarrow 0$ rezultă cu teorema de comparaţie $\mathrm{pd}_B(B/L) < \infty$.

Conform ipotezei de inducţie, idealul $L = I/a_1A$ este generat de un A/a_1A-şir de lungime $t-1$. Cum a_1 este nondivizor al lui zero pe A, înseamnă că I este generat de un A-şir de lungime t. □

Din acest rezultat decurge o caracterizare omologică pentru inelele locale regulate.

COROLAR 4.8. *Pentru un inel local noetherian (A, M, K), următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) A este un inel regulat,

(ii) $\mathrm{pd}_A(K) < \infty$.

Dacă una dintre aceste condiţii este îndeplinită, atunci are loc egalitatea $\mathrm{pd}_A(K) = \dim A$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece M/M^2 este A/M-modul liber, din teorema Ferrand-Vasconcelos rezultă că $\mathrm{pd}_A(K) < \infty$ dacă şi numai dacă M este generat de un şir regulat. Această ultimă condiţie înseamnă exact că A este inel regulat. Dacă A este inel regulat de dimensiune d, atunci M este generat de un şir regulat de lungime d şi din demonstraţia precedentă se ştie că $\mathrm{pd}_A(K) = d$. □

Este uşor de obţinut o caracterizare analoagă în cazul global:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

TEOREMA 4.9. *(Auslander-Buchsbaum-Serre) Fie A un inel noetherian de dimensiune Krull finită d. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) A este inel regulat,

(ii) orice A-modul de tip finit are dimensiunea proiectivă cel mult d,

(iii) orice A-modul finit generat are dimensiunea proiectivă finită.

DEMONSTRAŢIE. Fie A un inel regulat şi E un modul de tip finit. Este suficient să arătăm că $\mathrm{pd}_{A_M}(E_M) \leq d$ pentru orice ideal maximal M al lui A. Dacă dim $A_M = 0$, atunci A_M este corp (fiind inel local regulat de dimensiune zero), deci E_M este A_M-modul liber. În cazul A_M are dimensiunea strict pozitivă, există $x \in MA_M \setminus (M^2A_M \cup \mathrm{Z}(A))$. Atunci A_M/xA_M este inel local regulat de dimensiune dim $A_M - 1$. Considerăm un şir exact de A_M-module $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E_M \longrightarrow 0$ cu F un A_M-modul liber de rang finit. Cum fie G este nul, fie x este nondivizor al lui zero pe G, avem $\mathrm{pd}_{A_M}(G) = \mathrm{pd}_{A_M/xA_M}(G/xG)$. Din ipoteza inductivă rezultă $\mathrm{pd}_{A_M/xA_M}(G/xG) \leq$ dim $A_M - 1$, iar din teorema de comparaţie se deduce $\mathrm{pd}_{A_M}(A/M) \leq$ dim A_M. Astfel am demonstrat că (i) implică (ii).

Să presupunem că este îndeplinită condiţia (iii). Atunci pentru orice $M \in$ Max A, A-modulul A/M are dimensiunea proiectivă finită, prin urmare $\mathrm{pd}_{A_M}(A_M/MA_M) < \infty$. Apoi se foloseşte corolarul 4.8 pentru a conchide că A_M este inel regulat. Conform definiţiei, rezultă că A este inel regulat. □

Se poate arăta că dacă A este inel regulat de dimensiune finită, atunci *orice* A-modul (nu doar cele de tip finit) are dimensiunea proiectivă finită.

TEOREMA 4.10. *(Teorema syzygy a lui Hilbert) Orice modul finit generat peste un inel de polinoame cu coeficienţi într-un corp are o rezoluţie liberă de lungime cel mult numărul variabilelor.*

DEMONSTRAŢIE. Fie K un corp şi $A := K[X_1, \ldots, X_n]$ un inel de polinoame. Cum A este inel regulat de dimensiune Krull n conform corolarului II.4.26, din teorema Auslander-Buchsbaum-Serre se obţine că orice A-modul de tip finit are o rezoluţie proiectivă de lungime cel mult n. Concluzia anunţată rezultă din următorul rezultat. □

TEOREMA 4.11. *(Quillen-Suslin) Dacă A este un domeniu principal, toate $A[X_1, \ldots, X_n]$-modulele proiective finit generate sunt libere.*

Acest enunţ îşi are originea într-o remarcă făcută de Serre în 1955: „nu se ştie dacă există A-module proiective de tip finit care să nu fie

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

libere", unde A este un inel într-un număr finit de nedeterminate peste un corp. După o serie de rezultate parţiale obţinute de mai mulţi matematicieni, în 1976 Quillen şi Suslin dau simultan şi independent două demonstraţii diferite pentru enunţul consemnat în teorema 4.11. O demonstraţie este dată în [**14**]. O amplă prezentare a rezultatelor legate de problema lui Serre se găseşte în [**8**].

Folosind teorema Auslander-Buchsbaum-Serre, se poate studia foarte uşor stabilitatea regularităţii la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

PROPOZIŢIE 4.12. *Orice localizat al unui inel noetherian şi regulat are aceleaşi proprietăţi.*

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să arătăm că dacă A este inel noetherian regulat şi P este un ideal prim al său, atunci A_P este inel regulat. Fie $M \in \operatorname{Max} A$ cu $P \subseteq M$. Din caracterizarea omologică a inelelor regulate şi conform corolarului 2.6 avem

$$\operatorname{pd}_{A_P}(A_P/PA_P) \leq \operatorname{pd}_{A_M}(A_M/PA_M) < \infty ,$$

deci conform corolarului 4.8, A_P este inel regulat. □

PROPOZIŢIE 4.13. *Dacă inelul noetherian A este regulat, la fel este orice inel de polinoame $A[X_1, \dots, X_n]$.*

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra afirmaţia pentru $n = 1$, cazul general rezultând printr-un raţionament inductiv în care se foloseşte construcţia iterativă a inelului de polinoame

$$A[X_1, \dots, X_n] = A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n] .$$

Fie $Q \in \operatorname{Spec} A[X]$ şi $P := Q \cap A$. Atunci $A[X]_Q = (A_P[X])_Q$ şi idealul maximal al acestui inel local are urma pe inelul de coeficienţi A_P tocmai idealul maximal PA_P. Se aplică rezultatul următor. □

LEMA 4.14. *Fie (A, M, K) un inel local regulat şi $Q \in \operatorname{Spec} A[X]$ cu $Q \cap A = M$. Atunci $A[X]_Q$ este inel regulat.*

DEMONSTRAŢIE. Cum $MA[X] \subseteq Q$, avem

$$\dim A = \operatorname{ht} M = \operatorname{ht} MA[X] \leq \operatorname{ht} Q = \dim A[X]_Q .$$

Dacă $MA[X] = Q$, atunci $\dim A = \dim A[X]_Q$ şi Q este generat de $\dim A$ elemente, deci $A[X]_Q$ este inel regulat prin definiţie. Dacă $MA[X] \neq Q$, atunci $\dim A[X]_Q \geq \dim A{+}1$. Deoarece $A[X]/MA[X] \simeq$ $\simeq K[X]$ este domeniu principal, imaginea idealului Q în acest inel este generată de un singur element, astfel că idealul Q este generat de exact $\dim A + 1$ elemente. Rezultă

$$\operatorname{edim} A[X]_Q \leq \dim A + 1 \leq \dim A[X]_Q .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dar dimensiunea de scufundare este întotdeauna cel puţin cât dimensiunea inelului, astfel că inegalităţile precedente sunt de fapt egalităţi. □

Reciproca propoziţiei 4.13 este adevărată, dar pentru a o demonstra avem nevoie de un rezultat referitor la transferul regularităţii prin morfisme plate.

TEOREMA 4.15. *Fie $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ un morfism plat şi local de inele locale noetheriene.*

a) Dacă B este inel regulat, atunci A este regulat.

b) Dacă A şi B/MB sunt inele regulate, atunci B este inel regulat.

DEMONSTRAŢIE. a) Prin tensorizarea cu B a unei rezoluţii libere minimale a A-modulului K se obţine o rezoluţie liberă (căci B este A-modul plat) minimală (întrucât $u(M) \subseteq N$) a B-modulului $K \otimes_A B \simeq B/MB$. Prin urmare, $\mathrm{pd}_A(K) = \mathrm{pd}_B(B/MB) < \infty$ şi afirmaţia rezultă din corolarul 4.8.

b) Fie $d := \dim A$, $n := \dim B/MB$, $a_1, \ldots, a_d$ un sistem minimal de generatori ai lui M şi $b_1, \ldots, b_n$ un sistem minimal de generatori ai lui N/MB. Atunci $u(a_1), \ldots, u(a_d), b_1, \ldots, b_n$ este un sistem minimal de generatori ai lui N constând din $\dim A + \dim B/MB$ elemente. Dar în condiţiile date, $\dim B = \dim A + \dim B/MB$ conform corolarului II.4.19. □

EXEMPLU. În condiţiile de la punctul a) este posibil ca fibra B/MB să nu fie inel regulat. De pildă, dacă K este un corp, atunci $B := K[\![X, Y]\!]/(Y - X^2) =: K[\![x, y]\!]$ şi $A := K[\![y]\!] \subset B$ sunt inele regulate, iar B este un A-modul liber, generat de 1 şi x, pe când $B/yB \simeq K[\![X]\!]/(X^2)$ nu este inel regulat, fiind un inel local în care există elemente nilpotente nenule.

TEOREMA 4.16. *Un inel noetherian A este regulat dacă există un inel de polinoame $A[X_1, \ldots, X_n]$, $n \geq 0$, care să fie inel regulat.*

DEMONSTRAŢIE. Putem presupune $n = 1$ şi $X_1 = X$. Pentru M ideal maximal al lui A notăm $N := (M, X) \in \mathrm{Max}\, A[X]$. Morfismul canonic $A \longrightarrow A[X]$ induce un morfism local şi plat $A_M \longrightarrow A[X]_N$. Conform teoremei 4.15, regularitatea coboară prin astfel de morfisme. □

Adăugăm un rezultat foarte util în contextul lemei de normalizare.

PROPOZIŢIE 4.17. *Fie B un inel local noetherian şi A un subinel local şi regulat astfel încât B este un A-modul finit generat. Atunci B este inel Cohen-Macaulay dacă şi numai dacă este A-modul liber.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DEMONSTRAŢIE. Conform versiunii locale a teoremei Auslander-Buchsbaum-Serre, $\mathrm{pd}_A(B) < \infty$. Ţinând cont de teorema Auslander-Buchsbaum, rezultă că B este A-modul liber dacă şi numai dacă $\mathrm{prof}_A B$ coincide cu prof A. Din ipoteza A inel regulat şi din propoziţia 2.13 conchidem că A este inel Cohen-Macaulay, deci prof A = dim A. Pe de altă parte, dacă $x_1, \ldots, x_d$ este un sistem regulat de parametri ai lui A, acesta este sistem de parametri ai lui B. Aşadar, B este inel Cohen-Macaulay dacă şi numai dacă $x_1, \ldots, x_d$ este B-şir, iar această proprietate echivalează cu $\mathrm{prof}_A B = \mathrm{prof}\, A$. □

Menţionăm o altă proprietate importantă a inelelor locale regulate, pentru a cărei demonstraţie trimitem la [**19**, teorema 2.16].

TEOREMA 4.18. *(Auslander-Buchsbaum-Nagata) Un inel local regulat este factorial.*

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Bibliografie

[1] T. Albu, Ş. Raianu, *Lecţii de algebră comutativă*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1982.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Herrman, Paris, 1961–1991.

[3] A. Brezuleanu, N. Radu, *Lecţii de algebră III. Algebra locală*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1982.

[4] A. Brezuleanu, N. Radu, *Algebre locale*, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1998.

[5] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[6] I. Bucur, *Algebră omologică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[7] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[8] S. Dăncescu, C. Năstăsescu, *Capitole speciale de algebră*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1982.

[9] T. Dumitrescu, A remark on going down, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N. S.)*, **30(78)**(1986), 213–216.

[10] D. Eisenbud, Subrings of Artinian and Noetherian rings, *Math. Ann.*, **185**(3)(1970), 244-247.

[11] M. Hochster, Pathological maximal R-sequences in quasilocal domains, *Portugalia Math.*, **38**(1979), 33–36.

[12] I. Kaplanski, *Fields and Rings*, Univ of Chicago Press, 1969.

[13] I. Kaplanski, *Commutative Rings*, Allyn & Bacon, Boston, 1970.

[14] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[15] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, second ed., Benjamin, New York, 1980.

[16] M. Nagata, *Local Rings*, Wiley, New York, 1962.

[17] C. Năstăsescu, *Inele, module, categorii*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1976.

[18] V. Nica, D. Popescu, *Inele henseliene şi proprietatea de aproximare*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1979.

[19] N. Radu, *Inele locale*, vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1968.

[20] N. Radu, *Lecţii de algebră III. Descompunere primară în inele comutative*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1981.

[21] J.-P. Serre, *Algèbre Locale, Multiplicités*, Springer Lect. Notes in Math., **11**(1965).

[22] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, 2 vol., Van Nostrand, Princeton, 1958 şi 1960.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Index

algebră, 7
  afină, 53
  de tip finit, 8
  finit generată, 8
  finită, 8
  întreagă, 41
  omogenă, 65
  sistem de generatori, 8
Artin, E., 2, 67
asasin, 25
Auslander, M., 115, 121, 125

Baer, R., 101
Bass, H., 93
Buchsbaum, D., 115, 121, 125

cât de module, 13
Chevalley, C., 70
Cohen, I.S., 49, 50, 88
coînălţimea unui ideal
  arbitrar, 47
  prim, 47
conductorul unui subinel, 53
criteriul de normalitate Krull-Serre, 98
criteriul lui Baer, 101

dimensiune proiectivă, 107
dimensiunea
  inelului nul, 48
  Krull, 48
  unui ideal, 47
  unui inel, 48
domeniu
  afin, 53
  normal, 43
Dumitrescu, T., 51

Eakin, P.M. Jr., 8
Eckmann, B., 101
Eisenbud, D., 8
element
  algebric peste un corp, 50
  divizor al lui zero, 26
  regulat, 26
exemplul lui Nagata, 59
extindere de inele, 8

Ferrand, D., 120
funcţia Hilbert, 65
  afină, 68
funcţia Hilbert-Samuel, 66
funcţie
  polinomială, 62

Gorenstein, D., 93
gradul
  unei funcţii polinomiale, 62
  unui ideal pe un modul, 85

Hölder, O., 11
Hilbert, D., 7, 44, 65, 66, 106, 122
Hochster, M., 80, 83

ideal
  de definiţie, 69
  divizor prim al unui submodul, 25
  prim asociat unui modul, 25
  prim minimal, 16
  radical, 14
  radical Jacobson, 22
  urmă, 47
inel
  artinian, 2
  Cohen-Macaulay, 88
  Gorenstein, 93
  graduat
    standard, 65
  intersecţie completă, 94
  întreg închis, 43

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

- local, 22
  - Cohen-Macaulay, 88
  - Gorenstein, 93
  - regulat, 69
- local-intersecţie completă, 94
- noetherian, 2
- normal, 94
- redus, 14
- semilocal, 22

înălţimea unui ideal
- arbitrar, 47
- prim, 47

închiderea întreagă, 43
întreg
- element, 41

Jacobson, N., 22
Jordan, C., 11

Krull, W., 15, 36, 48–50, 70, 72, 98

lanţ de ideale prime
- lungime, 47
- saturat, 47

lema
- Artin-Rees, 67
- chineză a resturilor, 24
- de evitare, 22
- de normalizare, 54
- lui Krull, 15
- lui Nakayama, 23
- lui Schanuel, 108
- serpentinei, 102
- şarpelui, 102

Macaulay, F.S., 88, 89
McCoy, N.H., 22
modul
- anulatorul unui ideal într-un, 13
- artinian, 2
- Cohen-Macaulay
  - peste inel arbitrar, 88
  - peste inel local, 88
- de lungime finită, 10
- de relaţii, 107
- de syzygy, 107
- divizibil, 101
- finit cogenerat, 2
- finit generat, 2
- funcţia Hilbert pentru un, 65
- indecompozabil, 13
- injectiv, 99
- lungimea unui, 11
- noetherian, 2
- proiectiv, 99
- rădăcina unui submodul, 14
- suport, 21

morfism
- de tip finit, 8
- finit, 8
- întreg, 43
- întreg închis, 43

Nagata, M., 8, 59, 125
Nakayama, T., 23
nilradical, 14
Noether, E., 2, 56
normalizare Noether, 56
Nullstellensatz, 44
numere Betti
- pentru un inel local, 113
- pentru un modul, 113

operatorul diferenţă, 62

polinom
- asociat unei funcţii polinomiale, 62

polinom minimal, 50
profunzimea unui modul într-un ideal, 85

Quillen, D., 122

Rees, D., 67
regulat
- element, 26

rezoluţie
- liberă, 107
  - minimală, 112
- proiectivă, 107

Samuel, P., 66, 70
Schanuel, S., 108
Schopf, A., 101
Seidenberg, A., 49, 50
serie generatoare, 64
serie normală, 9
- factori, 9
- lungime, 9

serie Jordan-Hölder, 9
Serre, J.-P., 98, 121
sistem de parametri, 69
regulat, 70
soclu, 92
spaţiu topologic
ireductibil, 21
submodul
componentă primară scufundată, 35
componente primare, 34
descompunere primară, 34
redusă, 34
ireductibil, 31
primar, 30
Suslin, A.A., 122
Swan, R., 99

şir regulat, 80
şir de compoziţie, 9

teorema
Auslander-Buchsbaum, 115
Auslander-Buchsbaum-Nagata, 125
Auslander-Buchsbaum-Serre, 121
bazei a lui Hilbert, 7
de comparaţie, 111
de intersecţie a lui Krull, 36
de nemixtare a lui Macaulay, 89
Eakin-Nagata-Eisenbud, 8
Eckmann-Schopf, 101
Ferrand-Vasconcelos, 120
GD, 51
GD a lui Krull-Cohen-Seidenberg, 50
GU, 49, 57
GU a lui Krull-Cohen-Seidenberg, 49
idealului principal a lui Krull, 72
Jordan-Hölder, 11
Krull-Chevalley-Samuel, 70
lui Dumitrescu, 51
Nullstellensatz, 44
Quillen-Suslin, 122
syzygy a lui Hilbert, 122
zerourilor a lui Hilbert (forma slabă), 44
tipul unui inel Cohen-Macaulay, 93
topologia lui Zariski, 19
topologia spectrală, 19
transportor, 13

Vasconcelos, W.V., 120

Zariski, O., 19

VERIFICAT 2017

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Tiparul s-a executat sub cda 979/2002
la Tipografia Editurii Universității din București

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

66 000 lei

ISBN 973-575-697-8

Lei 66000

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro